自然境界条件による水面波動問題の開境界処理の精度について

広島工業大学　正会員　樫山和男
東 洋 建 設　　　　　菊池隆二

1．はじめに

有限要素法や差分法などの領域型の解法によって水面波動問題の解析を行う場合には、沖側に仮想境界（開境界）を設定し、その境界上において無限遠方における条件（ゾンマーフェルトの放射条件）を考慮するための開境界処理を行うことが必要不可欠となる。このため、これまでに1)固有関数展開表示された解析解を用いる方法[1]、2)境界要素法を用いる方法[2]、3)無限要素を用いる方法[3]などが提案されている。著者らは、これらの方法の比較検討を行った結果、これらの方法はいずれも高精度ではあるが開境界を処理するためのプログラミングが繁雑であったり、計算機容量や計算時間を多く必要とするなどといった実用上の問題点があることを報告した[4]。

本報告は、上記の問題点を解決する方法として、有限要素法のみを用いて自然境界条件により放射条件を処理する方法[5]の精度について回折散乱問題を例にとって比較検討するものである。なお、有限要素としては、著者の一人が提案した境界型有限要素[6]を用いた。

2．基礎方程式と境界条件

流体は非圧縮、非粘性で非回転の流体運動を仮定する。回折散乱問題における基礎方程式と境界条件は、次のようである（図-1参照）。

$$(CC_g\eta_{,i})_{,i} + k^2CC_g\eta = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\eta_{sc,r} - ik\eta_{sc} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\infty \tag{2}$$

$$\eta_{,n} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_s \tag{3}$$

ここに、η：合成波の振幅関数、η_{sc}：散乱波の振幅関数、C：波速、C_g：群速度、k：波数、i：虚数単位、r:散乱源からの距離、n:境界に立てた外向き法線方向である。

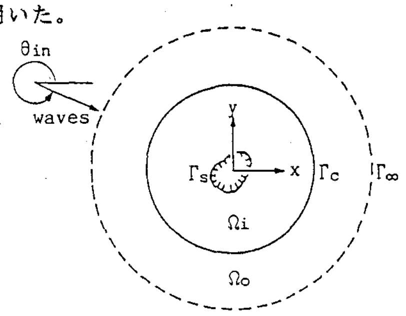

図-1 領域定義図

合成波の振幅関数ηは、入射波の振幅関数η_{in}、散乱波の振幅関数η_{sc}の和であると仮定する。

$$\eta = \eta_{in} + \eta_{sc} \tag{4}$$

ここで、η_{in}は既知であり、次式で表わされる。

$$\eta_{in} = A\exp\{ikr\cos(\theta - \theta_{in})\} \tag{5}$$

ここに、Aは入射波の振幅、θ_{in}は波の入射角である。

ここで述べる手法では、本来無限遠方で課せられる放射条件を、境界Γc上で課すことになる。すなわち、

$$\eta_{sc,r} - ik\eta_{sc} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_c \tag{6}$$

とする。すると、境界Γc上で次式が成立する。

$$\eta_{,r} - ik\eta = \eta_{in,r} - ik\eta_{in} = f \quad \text{on} \quad \Gamma_c \tag{7}$$

ここに、fは既知量となる。

3．有限要素法

上記の基礎方程式と境界条件に対して重み付き残差法を適用し、境界条件を参照すると次の重み付き残差方程式が得られる。

$$\int_\Omega \{CC_g(\eta^*_{,i})(\eta_{,i}) - k^2CC_g\eta^*\eta\}d\Omega - \int_{\Gamma_C} CC_g ik\eta^*\eta\, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} CC_g\eta^* f\, d\Gamma \tag{8}$$

ここに、η^*は重み関数である。そして、左辺第一項を部分積分し、基礎方程式の解を満足する内挿多項式を用いると次のようになる。

$$\int_\Gamma CC_g\eta^*\eta_{,n}d\Gamma - \int_{\Gamma_C} CC_g ik\eta^*\eta\, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} CC_g\eta^* f\, d\Gamma \tag{9}$$

そして、三節点三角形の境界型有限要素を用いて離散化を行うと、最終的に次の有限要素方程式が得られる。

$$[K - ikM]\ \eta = F \qquad (10)$$

上式を全要素について重ね合せることにより、全体系の有限要素方程式が得られる。

4．数値計算例

本計算法の精度を検討するために、解析解の存在する円柱による波の回折散乱問題を例としてとりあげ、他の1)～3)の方法との比較を行った。図-2に示すように、1層の幅が0.25の要素分割を用いて、1層から10層まで変化させて解析を行い、開境界の設定位置が変化することによって、解析精度がどのように変化するかの検討を行った。なお、円周方向の分割数は36と固定し、計算条件としては、入射波の波数はk=2.0とした。

図-3に、開境界の設定位置と円柱表面上の平均誤差の関係を示している。図中、□印は本計算法による結果、◇印は外部領域に解析解を用いる方法による結果、△は境界要素法を用いた場合の結果、×は無限要素を用いた場合の結果である。これより、本計算法は開境界の位置が遠くなるにつれ解析精度が向上しており、開境界を5層の位置（図-2(b)）程度にとれば、放射条件をより厳密に数値処理している1)～3)の方法による結果とほとんど差異のない良い計算精度が得られていることが分る。また、境界要素法を用いる場合において、開境界の位置が7層の場合に誤差が大きくなっていることが分るが、これは境界要素マトリックスが特異になるためであり、この点には注意する必要がある。

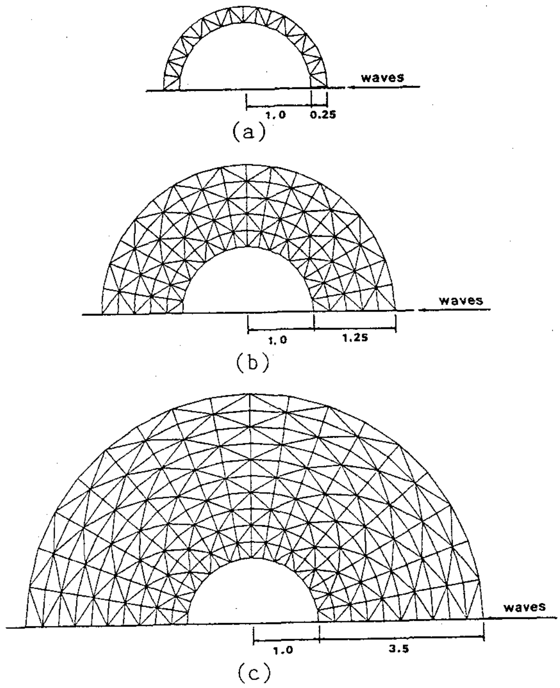

図-2 要素分割図

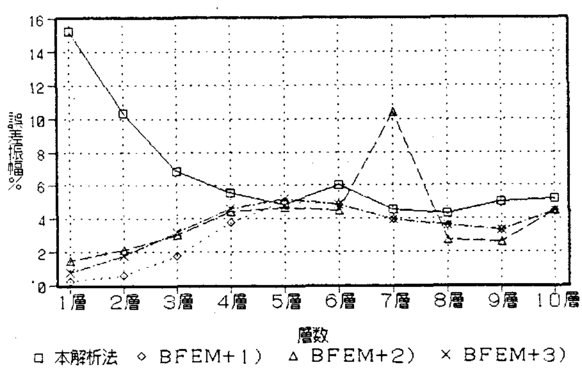

図-3 計算精度の比較

5．おわりに

水面波動問題における放射条件を、開境界上に課し自然境界条件により処理する方法の精度の検討を行った。その結果、開境界の位置をさほど遠くに設定しなくても、他の方法に比べて精度的に差異がないことが明らかになった。この方法は、係数マトリックスが完全に三重対角のスパースマトリックスになるため、計算時間および計算機容量の点で他の方法に比べて有効な方法であると言える。また、プログラミングも極めて容易である。

参考文献 1) Chen,H.S. and Mei,C.C., Persons Lab., MIT, Report No.190, 1977. 2)Zienkiewicz, O.C. et al., in Energy Methods in Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, pp.81-107, 1977. 3) Bettess, P. et al., in Numerical Methods in Coupled Systems, John wiley & Sons, pp.489-504, 1984. 4) 樫山,石井,川原，第35回応用力学連合講演会講演予稿集，pp.345-348, 1985. 5) Walker,S. and Brebbia,C.A., Adv. Water Resources, Vol.1, pp.205-211, 1978. 6) Kashiyama, K. and Kawahara,M., Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.8, pp.65-79, 1988.