有限要素法による自由表面流の数値解析

岡山大学工学部　正員　名合　宏之
岡山大学工学部　正員　○前野　詩朗
中央復建コンサルタンツ㈱　藤原　斉

1．まえがき

著者らは、自由表面を有する急変流の数値解析法を確立することを目的として、越流型フラップゲートおよび底流型ゲートを対象として，M.Castro-Delgadoら[1]によって提案された、三角形要素の各接点における流れ関数ψの値とx座標を固定し、y座標を未知数として解く有限要素法による解析法の適用性について検討を行ってきた[2),3)]。その結果、この解析法はかなりよい結果が得られ有効ではあるが、要素形状および初期条件の設定に制限を受けることが明らかにされた。これは、三角形要素の内挿関数の次数が1次であることが要因の1つであると考えられた。そこで本研究では，P.Bettess ら[4)]によって提案された2次の内挿関数を用いた四角形8節点要素による有限要素解析法を採用し、底流形ゲートに対してこの解析法の適用性について検討を行うものである。

2．数値解析法

図1は解析で対象とする底流型ゲートの模式図である。流れが2次元非回転であるとすると、ポテンシャル理論より、流れの領域はラプラスの式(1) および式(2) ～(5) の境界条件により決定される。

$$\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2=0 \quad (1)$$

AB，CD上で　$\psi=$一定$=q$　(2)　　AB，CD上で $(\partial\psi/\partial n)^2=2gz_0$　(3)

EF上で　$\psi=0$　(4)　　AF，DE上で$\partial\psi/\partial n=0$　(5)

ここに、ψ：流れ関数，q：単位幅流量，g：重力加速度，n：境界より外向きの法線である。境界AFとDEはそれぞれゲート部分から十分に離れた上流と下流にあるとしている。与えられた境界条件のもとでラプラスの方程式を直接的に解くことは困難であるので、ここでは、次式で表わされる汎関数を導入する。

$$G=\iint(1/2)\{(\partial\psi/\partial x)^2+(\partial\psi/\partial y)^2\}dxdy-(1/2)g\int z^2\,dx \quad (6)$$

変分法によると、上式の汎関数を最小にすることはラプラスの式および境界条件を満たすことになる。この関係を利用し、さらに以下にのべる有限要素法による離散化手法を行えば数値解を求めることができる。

図2は自由表面を有する8節点四角形要素である。図に示されるように自由表面を示す節点5,6,7 は$b_i(i=1,2,3)$ だけ移動することが許されている。また、節点4,8 は節点5,7 の移動量の1/2 動かすものとする。このように要素形状が変化する場合、局所座標系における形状関数［N］の導関数∂［N］／$\partial\xi$，∂［N］／$\partial\eta$は一定であるから、全体座標系における勾配マトリックス［B］への影響はもっぱらヤコビ

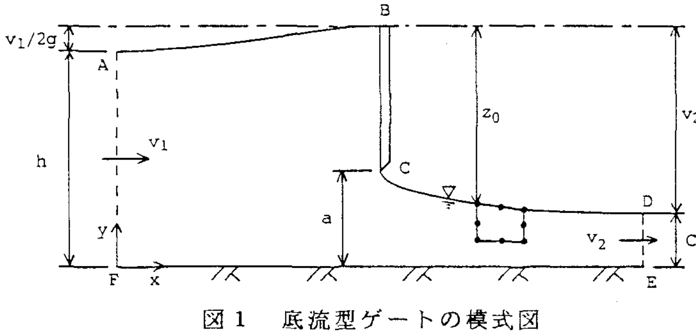

図1　底流型ゲートの模式図

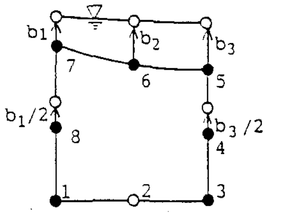

図2　自由表面を含む要素

アンマトリクス［J］の変化によるものだけに限られる。すなわち、ヤコビアンマトリクスは次式のように表わすことができる。

$$[J]=[L]+[M]^i\,b_i\ (i=1,2,3) \tag{6}$$

ここに、［L］：$b_i=0$の場合のヤコビアンマトリックス、［M］：移動節点（自由表面）における形状関数の導関数である。勾配マトリックス［B］を求めるためには式(6) の逆行列が必要となるが、ここではTaylor展開の３次以上の高次項を無視した次式を用いている。

$$[J]^{-1}(b_i)=[J]^{-1}(0)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial[J]^{-1}(0)}{\partial b_i}b_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2[J]^{-1}(0)}{\partial b_i\partial b_j}b_ib_i \tag{7}$$

ここに、

$$[J]^{-1}(0)=\mathrm{adj}[L]/\Delta, \tag{8}$$

$$(\partial[J]^{-1}(0)/\partial b_i)\,b_i=(\mathrm{adj}[M]^i-P_i[L]^{-1})/\Delta, \tag{9}$$

$$(\partial^2[J]^{-1}(0)/\partial b_i\partial b_j)\,b_ib_j=(-\mathrm{adj}[M]^iP_j/\Delta-\mathrm{adj}[M]^jP_i/\Delta+[L]^{-1}(2P_iP_j/\Delta-Q_{ij}))/\Delta \tag{10}$$

$$\Delta:\ \det[L],\quad P_{ij}=L_{11}M_{22}^i+L_{22}M_{11}^i-L_{12}M_{21}^i-L_{21}M_{12}^i$$

$$Q_{ij}=M_{11}^iM_{22}^j+M_{22}^jM_{11}^i-M_{12}^iM_{21}^j-M_{21}^jM_{12}^i$$

である。したがって、勾配マトリックス［B］は次式のようになる。

$$[B]=[C]+\Sigma[D]^i\,b_i+\frac{1}{2}\Sigma\Sigma[E]^{ij}b_ib_j \tag{11}$$

ここに、［C］，［D］および［E］は式(8) ～(10)にそれぞれ形状関数の導関数を掛けたものである。

つぎに、全水頭と自由表面との鉛直距離をz_0とし、流れ関数の値をψとすると、自由表面がb_iだけ移動すると流れ関数ψの値も$\delta\psi$だけ変化するものとおけるから、汎関数は次式のようになる。

$$G=\frac{1}{2}(\psi+\delta\psi)^T\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}([C]+\Sigma[D]^i\,b_i+\frac{1}{2}\Sigma\Sigma[E]^{ij}b_ib_j)^T\cdot([C]+\Sigma[D]^i\,b_i+\frac{1}{2}\Sigma\Sigma[E]^{ij}b_ib_j)\det[J]\,d\xi\,d\eta\,(\psi+\delta\psi)-\frac{1}{2}g\int_{-1}^{+1}(z_0-L_ib_i)^T\cdot(z_0-L_ib_i)\cdot(\delta+R_ib_i)\,d\xi \tag{12}$$

ここに、$\det[J]$：$[C]+\Sigma[D]^i\,b_i+\frac{1}{2}\Sigma\Sigma[E]^{ij}b_ib_j$，$L_i$：線要素の形状関数，$R_i$：線要素の形状関数の導関数，$\delta$：$\partial x/\partial\xi$である。式(12)はNewton-Raphson法により解を求めることができるが、この際２次以上の項は微小項として無視した。

３．結果

本研究では、底流型ゲート流出部におけるような曲率の急変する流れを取り扱うことのできる計算法になりうるのではないかという観点から、８節点四角形要素による有限要素法を採用してその適用性について検討を行った。しかし、計算結果は予想に反して自由表面をうまく再現できなかった。要素形状あるいは初期条件等の設定になお検討の余地が残されているが、現段階では、本解析法は水面が滑らかに変化する場合には有効であるが、今回取り扱ったような曲率の大きな流れには適用しにくいのではないかと考えられる。

参考文献

1)M.Castro-Delgado : ANALYSIS OF FREE-SURFACE FLOWS PAST OVER FLOW GATES USING FINITE ELEMENT METHOD : Computers & Fluids, Vol.14, No.2, 1986

2)名合宏之他：有限要素法による越流水脈形状の一計算法，第３９回中四支部講演概要集，1987

3)前野詩朗他：有限要素法による底流型水門の流出解析，第４３回年次講演会概要集，1988

4)P.Bettess and J.A.Bettess : ANALYSIS OF FREE SURFACE FLOWS USING ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS,International Journal for Numerical Metjod in Engineering, Vol.19, 1983