

開水路流れとサーチャージ流れの遷移部における数値計算法について

愛媛大学工学部 正員 渡辺 政広
飛鳥建設(株) 正員 ○門田 哲也
愛媛大学大学院 学生員 川裾 利雄

1. はじめに 下水管渠網における開水路流れとサーチャージ流れ（圧力流れ）が共存する遷移部の流れの数値計算（特性曲線法）において、従来の差分スキーム¹⁾を用いる計算法では、両流れの伝播特性が大きく異なるため、たとえ小さい計算時間間隔を用いる場合でも特性曲線式の積分結果に大きい誤差が現われ、計算が本来的に不安定ないしは続行不可能となる状況が生ずる。本報告では、こうした遷移部の流れに対し、数値計算上の幾つかの工夫を加えた安定性の高い数値計算法（特性曲線法）を提示すると共に、その適用性について流出実験を行なって検討する。

2. 積分型スキーム (1) 特性曲線式の積分；下水管渠の流出に対し、開水路流れとサーチャージ流れの両者に同形の基礎式が適用できるスロット・モデル²⁾を適用する。特性曲線式とこれに沿って成立する特性方程式の積分（図1の C^+ に沿う場合）は、次式（無次元）のように表わされる。

$$\int_{x_r}^{x_p} dx = \int_t^{t+\Delta t} (V+c) dt \quad (1), \quad \int_{V_r}^{V_p} dV + \int_{h_r}^{h_p} \frac{1}{c} dh - \alpha_1 \int_t^{t+\Delta t} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2^2} \cdot \frac{|V|V}{R^{4/3}} \right) dt = 0 \quad (2)$$

ここに、 V ：断面平均流速、 h ：水深あるいは圧力水頭、 R ：径深、 c ：流れの伝播速度、 Δt ：計算時間間隔、 α_1 、 α_2 ：流れのパラメーター、 x ：距離、 t ：時間。

従来の計算法では、上式の各被積分関数は積分区間内で線形的に変化していると仮定され、したがってそれらの積分結果は簡単な差分式で表わされている。しかし流れの遷移部では、 c 値が、開水路流れでの 0.1~1 程度からサーチャージ流れでの 10~数十程度まで、1~2 オーダーも異なる値へと変化する。このため、特に ($V+c$) および $1/c$ の変化は非線形的でかつ非常に急激であり、従来の差分式では、積分結果に大きい誤差を伴うことになる。

(2) 積分型スキーム；特性曲線に沿う被積分関数の時空間変化をできるだけ忠実に追跡し逐次積分してゆく、いわゆる積分型のスキームを提案する。まず、図2に示すように、遷移流が発生している $\Delta x \cdot \Delta t$ の領域において、計算時間間隔 Δt を M 区間に等分しておく。未知点 p の諸量に近似値を与え、これより内挿点 r へ向けて特性曲線式を次式により逐次積分してゆく。ここで、時間間隔 $\Delta t/M$ での数値積分には修正オイラー法を用いる。

$$x_p - x_r = \sum_{i=1}^M (x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^M \left(-\frac{1}{2} \left\{ (V+c)_{i-1} + (V+c)_i \right\} \right) \left(\frac{\Delta t}{M} \right) \quad (3)$$

ここに、添字 i は特性曲線上の各分点 i における値を、添字 0 および M はそれぞれ未知点 p および内挿点 r における値を示す。また、各分点 i における流速 V_i および水深 h_i は、 $\Delta x \cdot \Delta t$ の領域でこれらが線形変化しているとする、図2の4点 a 、 b 、 e 、 p の値を用いて簡単に算定される。上の逐次積分と平行して、特性方程式の $|V|V/R^{4/3}$ も同様に逐次積分する。一方、 $1/c$ の水深 h に関する積分は、 $1/c$ の近似式（表1および図3）を予め定めておくと、次の直接積分が可能となる。

$$\int_{h_r}^{h_p} \frac{1}{c} dh = \int_{z_r}^{z_p} f(z) dz = F(z_p) - F(z_r) \quad (4) ; \quad \text{ここに、} z \text{ は積分変数、} f(z) \text{ は } 1/c \text{ の近似関数、} F(z) \text{ は } f(z) \text{ の積分関数。}$$

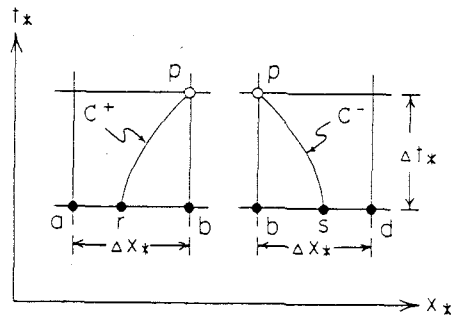


図1 矩形格子と特性曲線

(3) 分割数 M ; これを理論的に決定することはかなり困難である。これまでの経験により、 $M=30 \sim 60$ 程度とすれば、安定した計算結果の得られることを確かめている。

なお上述の遷移流計算法は、開水路流れの水深が管径の 95~99% を上回る状況で適用すればよい。

3. 流出実験 上述した遷移流計算法の適用性について、数値計算上の不安定が最も現れやすいケース、すなわち下水管渠システムの下流端でゲートを急閉する流出制御を行う場合に発生する遷移流（サージ・フロントを伴う）を対象に、水理模型実験を行い、本計算法による結果を実験結果（圧力水頭

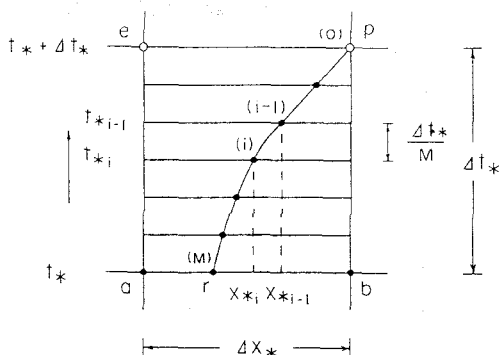


図2 積分型スキーム

表1 $1/c_*$ の近似関数

Sect.	Region	Variable	Approximate function	Approximation method
<I>	$0.01 \leq h_* \leq 0.14$	ϕ	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{3}{80} \phi^2\right)$	Taylor expansion
<II>	$0.14 \leq h_* \leq 0.33$	h_*	$-73.17 \cdot h_*^3 + 71.06 \cdot h_*^2 - 26.84 \cdot h_* + 5.785$	Least squares
<III>	$0.33 \leq h_* \leq 0.86$	h_*	$-4.210 \cdot h_*^3 + 8.815 \cdot h_*^2 - 7.714 \cdot h_* + 3.774$	Least squares
<IV>	$0.86 \leq h_* \leq h_{c*}$	ϕ	$\frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \phi^{3/2} \left(1 - \frac{\phi^2}{16} + \frac{\phi^3}{24\pi}\right)$	Taylor expansion

$$\phi = 2 \cdot \cos^{-1}(1 - 2 \cdot h_*), \quad \psi = 2\pi - \phi.$$

と対比して検討した(図4)。これらより、サージ・フロントの伝播過程については、これをよく再現する計算結果の得られることが確かめられた。一方、サーチャージ流れ部の圧力水頭の変動

については、実験結果に比べてやや大きい振動が現れる傾向がみられた。これは、本計算法がサージ・フロントでのエネルギー・ロスを考慮に入っていないことによるものと考えられ、この点については、今後、改良を進める必要がある。

1) Sevuk, A. S. and Yen, B. C.: A comparative study on flood routing computation, Proc. Int. Symp. on

River Mechanics, pp. 275~290, 1973. 2) 渡辺・竹内・栗原: 都市下水道網における遷移流れの実用的な流出モデル, 第41回中四支部研究発表会講演概要集, 1989.

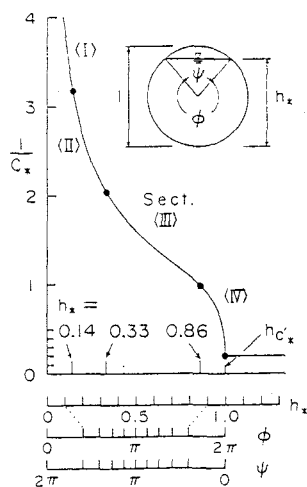


図3 $1/c_*$ の近似区間

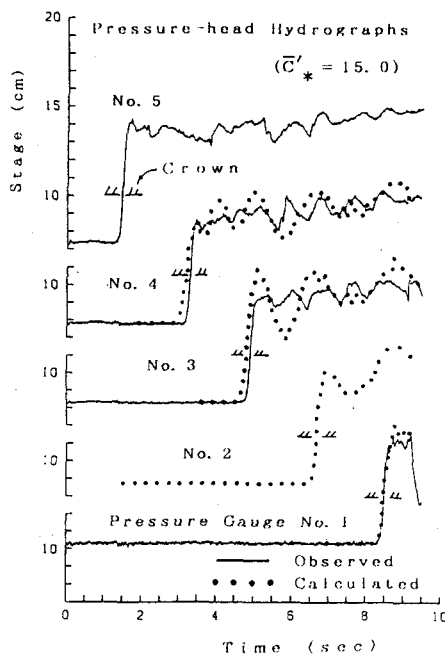


図4 計算結果と実験結果の比較(管渠径:10cm、初期水深:7cm)