Ｎｅｗ　Ｄｕａｌ法によるトラス構造物の総合的な最適化に関する研究

愛媛大学工学部　正会員　大久保　禎二
住友重機械工業(株)　正会員　○浅　井　一浩

１．まえがき

著者らはこれまでに、トラス構造物の非線形な設計空間を、目的関数及び制約条件の一次の偏微係数の符号により原設計変数あるいはその逆数を用いて確実に凸空間に近似し、双対理論により最適解を決定する方法(New Dual法)に関する基礎的な研究を行なってきたが[1]，本研究はこの方法によりトラス構造物の製作費を最小にするように各部材要素の断面寸法と使用材種、構造物の幾何形状を同時に最適化する総合的な最適設計法について考察した結果について述べるものである。

２．混合変数を用いたトラス構造物の近似設計問題の設定

トラス構造物の製作費を最小にする総合的な最適設計問題を解くため、本研究では原設計問題を部材断面積$\mathbf{A}$、部材要素の使用材種$\mathbb{M}$および節点座標$\mathbf{Y}$で表わし、これを混合変数を用いて次のように近似する。

目的関数：$\mathbf{W}\,(\mathbf{A},\ \mathbf{Y},\ \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})$

$$=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(M_i^0+\Delta M_i)\,A_i+\sum_{\substack{k=1\\(+)}}^{p}\left[\omega_k(\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})\,Y_k-\underset{(-)}{\omega_k}(\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})\,(Y_k^0)^2\frac{1}{Y_k}\right]+\overline{W} \tag{1}$$

制約条件：$g_j\,(\mathbf{A},\ \mathbf{Y},\ \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})$

$$=\sum_{\substack{i=1\\(+)}}^{n}\left[a_{ij}A_i-\underset{(-)}{a_{ij}}\,(A_i^0)^2\frac{1}{A_i}+m_{ij}\,\Delta M_i\right]+\sum_{\substack{k=1\\(+)}}^{p}\left[y_{kj}Y_k-\underset{(-)}{y_{kj}}\,(Y_k^0)^2\frac{1}{Y_k}\right]+\overline{U}_j\leqq 0 \tag{2}$$

ここに、$\omega_i=\partial W/\partial A_i$，$\omega_k=\partial W/\partial Y_k$，$a_{ij}=\partial g_j/\partial A_i$，$y_{kj}=\partial g_j/\partial Y_k$

$m_{ij}=\partial g_j/\partial M_i$　，　$\overline{W}$，$\overline{U}$：定数項　，　(＋)：正値　，(−)：負値

上式において、$\mathbf{A}$、$\mathbf{Y}$が連続変数であるのに対して$\mathbb{M}$は離散変数であり、$\mathbf{Y}$および$\mathbb{M}$の変化が設計空間に与える影響が大きいので、その１回の改良における変化幅$\Delta\mathbf{Y}$および$\Delta\mathbb{M}$をMove Limitにより制限している。式(1),(2)の近似により、原設計問題は確実に原設計問題より控えめな凸設計問題に近似される。[2]

３．双対設計問題の導入及び改良解の決定方法

式(1),(2)で表わされる凸近似設計問題を双対理論により解くため、凸近似設計問題のラグランジュ関数を導入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathbb{L}\,(\lambda,\ \mathbf{A},\ \mathbf{Y},\ \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})=&\sum_{i=1}^{n}\left[\omega_i(M_i^0+\Delta M_i)\,A_i+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\left(\underset{(+)}{a_{ij}}A_i-\underset{(-)}{a_{ij}}\,(A_i^0)^2\frac{1}{A_i}+m_{ij}\,\Delta M_i\right)\right]\\&+\sum_{\substack{k=1\\(+)}}^{p}\left[\omega_k(\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})\,Y_k-\underset{(-)}{\omega_k}(\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})(Y_k^0)^2\frac{1}{Y_k}+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\left(\underset{(+)}{y_{kj}}Y_k-\underset{(-)}{y_{kj}}\,(Y_k^0)^2\frac{1}{Y_k}\right)\right]\\&+\left[\overline{W}+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\,\overline{U}_j\right]\qquad,\ \lambda_j\geqq 0\qquad,\ (j=1,\cdots,q)\end{aligned} \tag{3}$$

ここにλ_jは双対変数（ラグランジュ乗数）である。

双対設計問題の解λ^*, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{Y}^*$, $\Delta\mathbb{M}^*$ は、次の２つのタイプの極値を求めるプロセス、すなわち、$\mathbb{L}\,(\lambda,\mathbf{A},\mathbf{Y},\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M})$の値を$\lambda$に関して最大化するプロセス、および$\mathbf{A}$，$\mathbf{Y}$、$\Delta\mathbb{M}$に関して最小化するプロセスにより決定される。ところで、式(3)を構成する各項についてみると、右辺の第一項がA_iおよびΔM_iに関する項の和で表わされ、第二項がY_kおよび$\Delta\mathbb{M}$に関する項の和で表わされている。また右辺の最終項は$\mathbf{A}$,$\mathbf{Y}$および$\Delta\mathbb{M}$に関しては定数項である。このことより、式(3)のラグランジュ関数$\mathbb{L}$（λ,$\mathbf{A}$,$\mathbf{Y}$,$\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}$）を与えられた$\lambda$のもとで$\mathbf{A}$,$\mathbf{Y}$，$\Delta\mathbb{M}$に関して最小化することは、式(3)の第一項の各ｉの［　］の値をA_iおよびΔM_iに関して最小化し、第二項の各ｋの［　］の値をY_kおよび$\Delta\mathbb{M}$に関して最小化することにより達成できることがわかる。

ところで、一般の構造設計問題においては$\Delta\mathbb{M}$および$\mathbf{Y}$の変化の影響が設計空間に与える影響が大きいことより、本研究ではまず各部材の材種を変化させないで、つまり$\Delta M_i=0$（$i=1,\cdots,n$）として式(3)の各［　］をそれぞれA_iおよびY_kについて独立に最小化しA_iおよびY_kを改良することとした。また

$\mathbb{L}$を最大にするλはニュートン法により改良している。次いでλおよび$\mathbb{Y}$を固定し、与えられたλのもとで式(3)を $\Delta\mathbb{M}$および$\mathbb{A}$に関して最小化する。このような$\mathbb{A}$, $\mathbb{Y}$, λおよび$\mathbb{M}$, $\mathbb{A}$の二段階の改良を繰り返すことにより最終的な最適解を決定することができる。

4．λ, $\mathbb{A}$, $\mathbb{Y}$の改良

式(3)の右辺の第一項の各iの［　］の値を与えられたλおよび $\Delta M_i=0$ のもとで最小化するA_i^*は、各［　］の項のA_iに関する偏微係数 ∂［　］／∂A_iが0となる条件を用いて次式より解析的に求められる。

$$A_i^*=\left[\frac{-\sum_{\substack{j=1\\(-)}}^{q}\lambda_j\, a_{ij}\,(A_i^0)^2}{\omega_i[M_i^0]+\sum_{\substack{j=1\\(+)}}^{q}\lambda_j\, a_{ij}}\right]^{1/2},\ 又は\ \begin{array}{l}A_i^*=A_i^U\ (上限値)\\ A_i^*=A_i^L\ (下限値)\end{array}\qquad(4)$$

同様に、与えられたλおよび $\Delta M_i=0$ のもとで式(3)の右辺の第二項の各kの［　］を最小化する Y_k^*は次式により求められる。

$\omega_k>0$ の場合　　　　　　$\omega_k<0$ の場合

$$Y_k^*=\left[\frac{-\sum_{\substack{j=1\\(-)}}^{q}\lambda_j y_{kj}(Y_k^0)^2}{\omega_k+\sum_{\substack{j=1\\(+)}}^{q}\lambda_j y_{kj}}\right]^{1/2},\quad Y_k^*=\left[\frac{-[\omega_k+\sum_{\substack{j=1\\(-)}}^{q}\lambda_j y_{kj}](Y_k^0)^2}{\sum_{\substack{j=1\\(+)}}^{q}\lambda_j y_{kj}}\right]^{1/2}\qquad(5)$$

λをニュートン法により改良し、これに従い式(4), (5) により$\mathbb{A}$および$\mathbb{Y}$を改良する。このような改良を繰り返すことによりλ, $\mathbb{A}$, $\mathbb{Y}$を一定値に収束させることができる。

5．$\mathbb{M}$および$\mathbb{A}$の改良

上記の第一段階の改良過程により改良されたλおよび$\mathbb{Y}$を固定し、第二段階の$\mathbb{M}$の改良およびそれに伴う$\mathbb{A}$の改良を行う。式(3)の$\mathbb{L}$の$\Delta\mathbb{M}$に関する最小化は、右辺第一項の各部材要素ごとの［　］のΔM_iにM_i^0と相隣る１ランク上位($\Delta M_i=+1$)、あるいは１ランク下位($\Delta M_i=-1$)の材種を代入し、それぞれの材種における［　］の値の大きさを比較し、$\Delta M_i=+1$，０，－１の中で最小の［　］の値を与えるM_iを部材iの改良材種とする。この場合、アクティブな制約条件群を変化させずに、すなわちλを固定して［　］の値の大きさを比較するためには、m_{ij} ΔM_iの変化による各部材断面積の変化をも考慮して［　］の値を比較しなければならない。

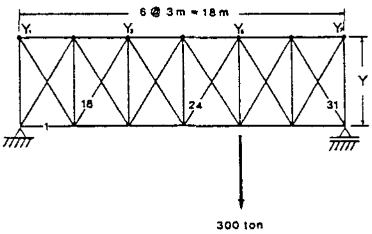
6．最適設計例

図-1に示す31部材トラスのたわみ制限δa ＝10cmの場合の改良過程を図-2および表-2に示す。使用材種は表－１の材種群から選択している。$\mathbb{A}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{Y}$の最適解への収束状況はきわめて良好であり、８回の改良でほぼ最適解の近傍に収束した後、19回の改良で最終的な最適解を得た。

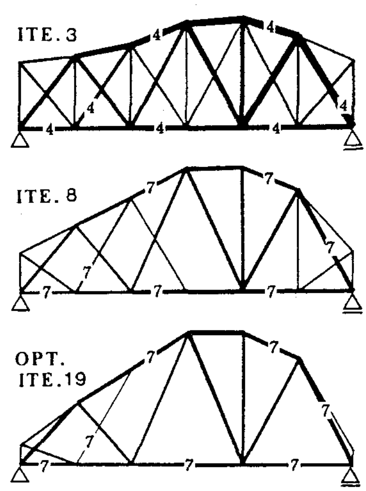
表－１　使用可能材種群

材種番号	許容応力度 (kg/cm²)	弾性係数 (kg/cm²)	ρ (1/cm³)
1	140	0.4×10^6	0.75
2	200	0.5	1.00
3	400	0.7	1.45
4	850	1.1	2.50
5	1300	1.4	3.20
6	1700	1.7	4.00
7	2400	2.1	5.10

ρ：部材の単位容積当りの相対的な製作費



図－１　31部材トラス



図－２　改良過程

表－２　31部材トラスの改良過程および最適解

ITE.*	CROSS-SECTIONAL AREA (cm²) A1	(M)*	A18	(M)*	A24	(M)*	A31	(M)*	COORDINATES (cm) Y1	Y3	Y5	Y7	TOTAL COST
INIT.**	100.0	(1)	100.0	(1)	100.0	(1)	100.0	(1)	500.0	500.0	500.0	500.0	1057286.
1	185.3	(2)	281.0	(2)	129.2	(2)	1170.2	(1)	450.0	450.0	450.0	450.0	6120002.
3	67.7	(4)	40.8	(4)	7.7	(4)	267.2	(4)	364.5	454.3	591.0	364.5	2835223.
8	28.5	(7)	5.6	(1)	0.1	(1)	93.1	(7)	215.2	506.8	676.8	215.2	1883401.
19(OPT.##)	30.5	(7)	2.4	(1)	0.1	(1)	93.2	(7)	104.6	528.3	721.7	86.8	1859293.

ITE.*:ITERATION NUMBER , M*: MATERIAL NUMBER , INIT**.: INITIAL VALUES
OPT##.:OPTIMUM SOLUTION , S_{as} : SET OF THE ACTIVE CONSTRAINTS

参考文献［1］たとえば、S.Ohkubo et.al.:Total Optimization of Truss Considering Shape, Material and Sizing Variables, Structures Congress, 1989. ［2］C.Fleury and V.Braibant:Structural Optimization - A New Dual Methods Using Mixed Variables,Int.J.Num.Meth.Engng, Vol.23,1986.