効率化モンテカルロ法とその構造信頼性解析への応用

鳥取大学工学部　正会員　高岡　宣善　　鳥取大学大学院　○学生員　酒井　太
鳥取大学工学部　正会員　白木　　渡　　滋賀県庁　　　　正会員　清水良幸
鳥取大学工学部　正会員　松保　重之

1．まえがき　最近、効率化モンテカルロ法により構造物の破壊確率を評価する手法が種々提案されている[1)-4)]。ここでは、それらの手法のうち Importance SamplingとAdaptive Sampling の概念をもとにした評価法であるISPUD(Importance Sampling Procedure Using Design Point)[3)], IFM(Iterative Fast Monte-Carlo)[5)]およびIFMPUC(Iterative Fast Monte-Carlo Procedure Using Conditional Failure Probability)[6)]について示す。そして、それらを簡単な構造信頼性問題に適用し、数値計算によりその有効性について比較検討を行う。さらに、複数の破壊基準関数を有する構造システムの信頼性の有効な評価法として、複数の破壊基準関数を1つの関数に近似する手法RSM(Response Surface Method)[7)]と上述した信頼性評価法IFMPUCとを組み合わせて用いる方法を提案する。

2．ISPUD, IFMおよびIFMPUCによる破壊確率の評価　時間に依存しない構造信頼性問題においては、一般に構造物の破壊確率P_fは式(1)で与えられる。ここに、D_fは破壊領域、$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は、いわゆる基本変数ベクトル$\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の同時確率密度である。Importance Sampling密度関数を用いれば、式(1)は式(2)のように書き換えられる[1)-4)]。ここに、$g(\underline{x})$は破壊基準関数で$g(\underline{x})\leq 0$は構造物の破壊を意味する。また、$I(\cdot)$は指標関数(indicator function)で、$I(g(\underline{x})\leq 0)=1$, $I(g(\underline{x})>0)=0$と定義される。そして、$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$はImportance Sampling密度関数である。Importance Samplingの基本概念は、破壊確率に貢献する最も重要な領域にサンプリング点を集中させることである。つまり、オリジナルな確率密度関数$f_{\underline{X}}(x)$の代わりに$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$を用いてサンプリングする。それゆえ、式(2)は式(3)によって数値的に評価される。ここに、Nはシミュレーション回数である。ISPUDと言われる手法は、設計点(design point)を Importance Samplingの確率密度関数$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$の平均値として選ぶものである。　次に、Adaptive Sampling手法について述べる。式(3)によって得られる破壊確率P_fの推定値の誤差は、推定値の分散S_I^2によって、式(4)のように表わされる。そして、いわゆる標準誤差S_{IE}は、式(5)で定義される。もし、$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$が破壊領域$D_f$内で定義される条件付きの$f_{\underline{X}}(\underline{x})$となるように、すなわち式(6)となるように選ばれれば、分散S_I^2をゼロにすることができる[4)]。実際問題において、これは不可能な選択である。しかしながら、少なくとも式(7)および(8)で表わされる1次および2次のモーメントの範囲内において、式(6)を満足できる$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$を選ぶことは可能である。ここに、$E_h$および$E_f$はそれぞれ$h_{\underline{Y}}(x)$および$f_{\underline{X}}(x)$に関する期待値演算、上付きの添え字Tはベクトルの転置を意味する記号である。まず、通常のモンテカルロ手法により、式(7)および(8)の右辺の$E_f(\underline{x}|\underline{x}\in D_f)$および$E_f(\underline{x}\underline{x}^T|\underline{x}\in D_f)$の値を推定し、これらの値を用いて$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$が定められる。次に、その確率密度関数によりImportance Samplingが実行され、$E_h(\underline{x})$および$E_h(\underline{x}\underline{x}^T)$の値が更新される。この手順を数回続ければ効率よく精度よい結果を得ることができる。このサンプリング手法がAdaptive Sampling手法と呼ばれるものである。多次元正規確率密度関数は、平均値と共分散によって唯一定義されるものであるので、このタイプの確率密度関数が$h_{\underline{Y}}(\underline{x})$として選ばれる。このAdaptive Samplingの考え方を用いて開発された破壊確率の評価法がIFM手法[8)]と呼ばれるものである。　さらに、条件付き破壊確率の概念を用いたIFM手法でIFMPUC

$$P_f = \int_{D_f} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n \quad (1)$$

$$P_f = \int_{\mathrm{all}\ \underline{x}} I(g(\underline{x})\leq 0)\,\frac{f_X(\underline{x})}{h_Y(\underline{x})}\,h_Y(\underline{x})\,d\underline{x} \quad (2)$$

$$P_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(g(\underline{x}_i)\leq 0)\,\frac{f_X(\underline{x}_i)}{h_Y(\underline{x}_i)} \quad (3)$$

$$S_I^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[I(g(\underline{x}_i)\leq 0)\,\frac{f_X(\underline{x}_i)}{h_Y(\underline{x}_i)}\right]^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(g(\underline{x}_i)\leq 0)\,\frac{f_X(\underline{x}_i)}{h_Y(\underline{x}_i)}\right]^2 \quad (4)$$

$$S_{IE} = \sqrt{\frac{S_I^2}{N}} \quad (5) \qquad h_Y(\underline{x}) = f_X(\underline{x}\,|\,\underline{x}\in D_f) \quad (6)$$

$$E_h(\underline{x}) = E_f(\underline{x}\,|\,\underline{x}\in D_f) \quad (7) \qquad E_h(\underline{x}\underline{x}^T) = E_f(\underline{x}\underline{x}^T\,|\,\underline{x}\in D_f) \quad (8)$$

と呼ばれるものがある。最後に、IFMPUCについて述べる。構造信頼性問題において、実際の破壊基準関数$g(\underline{x})$は式(9)の形で表現されることが多い[8]。ここに、uは確率ベクトル$X'=(X_2, X_3, \cdots, X_n)$の各変数に関して連続で単調な任意の関数である。いま、X_1とX'の間の統計的な独立性が仮定できるものとすると、X_1を除く全ての確率変数すなわち確率ベクトルX'が$X'=x'$という値をとるという条件のもとでの条件付き破壊確率$P_f^c(\underline{x}')$は、式(10)で与えられる。ここに、$F_{X_1}(\cdot)$はX_1の確率分布関数である。式(10)より明らかなように、X_1がX'に独立であり、$X'=x'$の与えられた値に対してX_1が破壊基準面上で定義される唯一の値をとるとすれば、$P_f^c(\underline{x}')$はX_1の確率分布関数から直接得ることができる。この条件付き破壊確率の概念を導入すれば、破壊確率を求めるための積分の次元が一つ減少でき、式(1)が次のように書き換えられる。これにより、P_fの評価に関して数値計算上の効率化がはかられるが、さらに効率化を行うために、式(11)の積分値の計算に際してIFM手法を用いるものである。 上述した３つの手法ISPUD, IFM, およびIFMPUCのうちで、構造物の破壊確率を計算する場合、IFM以外は複数の破壊基準関数を有する構造システムの信頼性評価問題に適用するのは困難である。しかし、破壊基準関数が複数の場合に、これらを１つの関数に近似する手法RSMを用いることによって、このような問題が解決でき、構造システムの信頼性を評価することができる。

$$g(\underline{x}) = u(x_2, x_3, \ldots, x_n) - x_1 \quad (9)$$

$$P_f^c(\underline{x}') = 1 - F_{X_1}(u(\underline{x}')) \quad (10)$$

$$P_f = \int_{\mathrm{all}\ \underline{x}'} P_f^c(\underline{x}') f_{\underline{x}'}(\underline{x}') d\underline{x}' \quad (11)$$

3. 数値計算例および考察

ISPUD, IFMおよびIFMPUCの各評価法を簡単な数値計算例によって比較する。取り扱う問題は、単純ばりに等分布荷重が載荷されている場合である。ここで、単純ばりの破壊は、等分布荷重により発生する最大曲げモーメントが、はりの抵抗モーメントを超えた時に生ずるものとして、破壊基準関数を式(12)で定義する。ここに、X_1およびX_2は、それぞれ$\mu_{X_1}=30.0$(tf·m), $\mu_{X_2}=2.0$(tf·m)および標準偏差$\sigma_{X_1}=5.0$(tf·m), $\sigma_{X_2}=1.0$(tf·m)を有する標準正規変数である。比較項目は、シミュレーション回数(N)、計算時間(CUP)および推定誤差(標準誤差S_{IE})の３つを考える。その結果をTable 1に示す。表から明らかなように、IFMPUCにより得られた結果は、シミュレーション回数N、CPU時間、標準誤差S_{IE}のいずれの項目においても、他の２つの手法に比べて優れており、この方法の有効性が示される。次に、破壊領域が式(13)で定義される複数の破壊基準関数を有する構造システムの信頼性評価問題について考えてみる。X_1, X_2は、互いに独立な標準正規変数である。この問題に対してRSMを用いてIFMPUCによって評価した結果をTable 2に示す。この結果より、RSMとIFMPUCを組み合わせて用いれば、複数の破壊基準関数を有する信頼性問題の場合に対して、非常に有効な手法になることが確かめられた。

$$g(X_1, X_2) = X_1 - \frac{X_2}{8} \cdot 8^2 = X_1 - 8 \cdot X_2 \quad (12)$$

$$D_f = \{(X_1, X_2) \mid (4 - X_1 < 0) \vee (4 - X_2 < 0)\} \quad (13)$$

Table 1 各評価法に対する計算結果の比較

Method	Number of Simulation	Run No.	P_f $\times 10^{-1}$	Statistical Error(%)	CPUTIME (sec)
IFMPUC	1000	1	0.688	0.5	0.37
	5000	1	0.689	0.2	1.34
IFM	1000	1 2 3	0.656 0.694 0.696	5.8 7.6 4.2	1.73
	5000	1 2 3	0.677 0.689 0.682	3.5 3.5 1.9	4.98
ISPUD	1000	1	0.693	4.3	0.43
	5000	1	0.685	1.9	1.96

Table 2 RSMを用いてIFMPUCで求めた計算結果

Method	Number of Simulation	Run No.	P_f $\times 10^{-3}$	Statistical Error(%)	CPUTIME (sec)
IFMPUC	100	1 2 3	6.310 6.292 6.288	2.1 1.7 1.8	0.29
	500	1 2 3	6.373 6.369 6.369	0.9 0.9 0.9	0.75
	1000	1 2 3	6.385 6.388 6.388	0.7 0.7 0.7	1.40
	4000	1 2 3	6.406 6.400 6.400	0.5 0.4 0.4	5.29

参考文献

1) Harbitz, A. Proc. of ICASP-4, pp.825-836, 1983.
2) Schueller, G. I. and Stix, R., Structural Safety, Vol.4, pp.291-309, 1987.
3) Bourgund, U and Bucher, C. G., Report No.8-86, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Nov., 1986.
4) Rubinstein, R. Y., John Wiley & Sons, New York, 1981.
5) Bucher, C. G., Structural Safety, Vo.5, pp.119-126, 1988.
6) 白木 渡, Schueller, G. I., 構造工学論文集Vol.35A(1989年3月).
7) Bucher, C. G. and Bourgund, U., Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Report No.9-87, 1987.
8) Harbitz, A., Proc. of Euromech 155 on Reliability Theory of Structural Engineering System, Dialog 6-82, Lyngby, pp.337-346, 1982.