はさみ込み法による
変断面連続桁の自由振動解析

鳥取大学　正員　神部　俊一
鳥取大学　正員　山本　真二
大成道路（株）　正員　山本　達哉
鳥取大学　○学生員　市川　章夫

1．まえがき

モーダル解析により構造物の動的応答特性を知るには、その自由振動性状を精度よく解析することが重要である。　しかし、還元法を用いて曲げ自由振動を解析する場合[1]に、格間行列に含まれる双曲線関数項の影響で、桁落ちによる誤差を生じるのが問題である。　この誤差を低減するのに効果のある解析方法が“はさみ込み法”[2]である。　本報では、変断面部を有する連続桁の自由振動性状を、この解析方法により明らかにできることを示す。

2．解析方法

桁の曲げ自由振動を支配する微分方程式の一般解は、桁軸方向の座標をｚとすると次式

$$V(z) = A\cosh\bar{\lambda}\frac{z}{l_0} + B\sinh\bar{\lambda}\frac{z}{l_0} + C\cos\bar{\lambda}\frac{z}{l_0} + D\sin\bar{\lambda}\frac{z}{l_0} \qquad (1)$$

ここに、　$\bar{\lambda}^4 = \frac{m\omega^2}{EI_0}l_0^4$　　EI_0：基準曲げ剛性　　ω：固有円振動数　　m：基準単位長さ質量　　l_0：基準支間長　　（2）

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ：積分定数　　Ｖ（ｚ）：たわみ

で与えられる。　これを用いて、桁の曲げ自由振動を還元法により定式化する。　次に、図－１に示すように、構造モデルを３つの部分構造に分割し、それぞれの部分構造の両端から内側に向けて還元法による演算を行い、状態量ベクトルを算出する。　そして、各部分構造の中間部及び接続部で状態量ベクトルの間に成立する条件式を接続行列を用いて求めれば、分割点の状態量を未知量とする同次連立一次方程式が得られる。　なお、変断面部分において還元法による演算を進めるには、Runge-Kutta法を適用して求めた格間行列を用いればよい。

部分構造（ｉ）（ ｉ＝１，２，３）に関する状態量ベクトルに対して次の関係式が成立する。

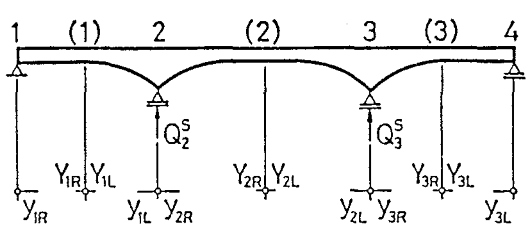
$$\bar{Y}_{iL} = \bar{N}_{iL}\bar{y}_{iL}, \qquad \bar{Y}_{iR} = \bar{N}_{iR}\bar{y}_{iR}, \qquad \bar{Y}_{iL} = \bar{C}_0\,\bar{Y}_{iR} \qquad (3)_{1\sim3}$$

ここに，$\bar{Y}_{iL}$，$\bar{Y}_{iR}$：部分構造（ｉ）の左端と右端から求められた中間部における状態量ベクトル

$\bar{y}_{iL}$，$\bar{y}_{iR}$：部分構造（ｉ）の左端と右端における初期状態量ベクトル

$\bar{N}_{iL}$，$\bar{N}_{iR}$：境界行列と格間行列との乗算により求まる伝達行列

$\bar{C}_0$　：左端と右端から求められた状態量ベクトルを関連付ける役割をする接続行列



図－１　解析用構造モデル

なお，上付きの横棒記号は無次元量であることを示す。　ここで、上で説明したように、式（３）$_{1\sim3}$ で与えられる関係式と分割点２，３において、変位の連続条件及び断面力と支承反力との間に成り立つ平衡条件式を利用すると、桁の分割点の状態量ｙを未知量とする同次連立一次方程式　$K(\bar{\lambda})\cdot y = 0$ が得られる。　これより、次の超越的な振動数方程式が求まる。

$$\det\ K(\bar{\lambda}) = 0 \qquad (4)$$

ここに、K（$\bar{\lambda}$）は、無次元助変数$\bar{\lambda}$に従属する係数行列である。
従って、この式（4）を満足する$\bar{\lambda}$から、低次から高次までの固有円振動数と、それらに対応する自由振動モードとが算出できる。

3．変断面区間の格間行列[3)]

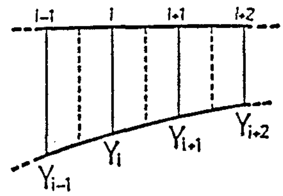
着目する変断面区間を図－2のように小格間に等分割し、それぞれに Runge-Kutta法を適用すれば、所要の格間行列が求まる。今、状態量ベクトル $\bar{Y}_i=(\bar{V}_i\ \bar{U}_i\ \bar{M}_i\ \bar{Q}_i)^T$ を支配する微分方程式が、平衡方程式と構成方程式とにより次式で与えられるとする。

$$\frac{d}{d\bar{z}}\bar{Y}_i=\bar{A}\,\bar{Y}_i \qquad (5)$$

ここに，　$\bar{A}$：横断面の形状寸法により定まる係数行列
ここで，図－2における任意の小格間 i ～ i＋1の始点 i の状態量ベクトル $\bar{Y}_i$ と端点 i＋1の状態量ベクトル$\bar{Y}_{i+1}$ の間には，次の関係式が成立する。

$$\bar{Y}_{i+1}=\bar{F}_i\cdot\bar{Y}_i \qquad (6)$$

ここに，$\bar{F}_i$ は係数行列$\bar{A}$を用いて、Runge-Kutta 法により求まる行列である。以上のようにして求まる小格間の格間行列を順次に掛け合わせて行けば変断面全体の格間行列が得られる。



図－2　変断面の小格間

表－1　自由振動の固有値

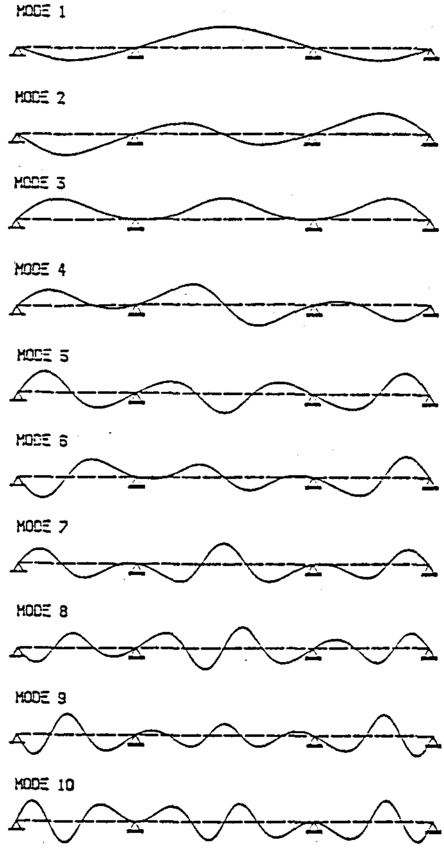
MODE	$\bar{\lambda}$
1	2.7917
2	3.8324
3	4.7572
4	5.8607
5	7.2313
6	7.8324
7	8.7068
8	10.3557
9	11.1950
10	11.7408

3，数値計算例

以上の解析方法を図－1に示す構造モデル（ 側径間 l、中央径間 1.5 l ）に適用して数値計算を行った。　断面の形状は等断面区間は一辺 a の正方形断面で，変断面区間では桁高を a から3 a に増加させ，板厚は共に a／100 とした。　表－1に自由振動の固有値$\bar{\lambda}$を、図－3に一次から10次までの固有振動モードを示す。　なお、固有円振動数ωは$\bar{\lambda}$を式（2）に代入すれば求まる。

4、あとがき

本研究は、変断面連続桁の自由振動性状をはさみ込み法を用いて解析した。　この解法を用いると、高次の振動において、双曲線関数の値が急増するために生じる数値誤差を低減することができる。　今後は本解法と有限要素法による解析結果と比較して、両解法の間に存在する利点と欠点を明らかにする必要があると考えている。



図－3　固有振動モード

参考文献）

1）R．ツルミュール著，瀬川富士，高市成方共訳：マトリクス理論と応用，ブレイン図書出版，pp363 ～365

2）神部俊一、田中善昭、甲斐龍二：はさみ込み法による多室断面鋼製箱桁の断面変形挙動解析，構造工学論文集 vol.34A,pp101 ～110

3）E．C．ペステル，F．A．レキー共著，加川幸夫訳：マトリクス弾性力学，ブレイン図書出版,pp145～146