修正共役傾斜法の改良に関する研究

岡山大学大学院　学生員　　○藤原　浩二
岡山大学工学部　正会員　　　谷口　健男

1まえがき

土木工学分野において数値解析の手法として、有限要素法がよく用いられ、最終的に大規模線形方程式を解く必要がある。その解法としてはこれまで主に直接法が用いられてきたが、容量的、精度的に問題がある。特にスーパーコンピューターの使用を前提としたとき直接法の利用には問題があり間接法が見直されてきた。間接法には演算時間という問題点があり、この問題点の解消を図ったものが修正共役傾斜法である。この計算法は、収束性の向上を図るべく、Preconditionerと呼ばれる行列を前もって作用させ、その後共役傾斜法を利用するものである。このPreconditionerとして一般に不完全コレスキー分解が良く利用されているが、これは板曲げのような条件が悪い場合は計算不能になることが知られている。ここでは解析対象として板曲げを取り上げ、プレコンディショナーとしてジェニングスらによって提案された手法（文献１）を基本に、それを修正することにより計算不能を防止しようとするものである。

2 Preconditioner

AX＝bという方程式を直接解く代わりに、ある正則行列Ｂを両辺に掛けてその後共役傾斜法を適用するのが修正共役傾斜法であり、行列Ｂは積ＢＡ収束性を向上させることを目的としている。この行列ＢをPreconditionerといい、具体的には行列Ｂを2つの三角行列の積で表し、行列Ａの近似行列となるような行列Ｂを探せば良い。ここではPreconditionerとして不完全コレスキー分解を使用する。

3 数値実験及び結果

3-1 数値実験モデル　解析モデルとして60cm四方の正方形(図１)、板厚 1cm、荷重 $1kg/cm^2$の等分布荷重、ヤング率 $2.0\times10^6 kg/cm^2$、ポアソン比 0.3の平板モデルを使用する。なお境界条件としては、対辺固定(図２)、対辺単純支持(図３)、一辺固定(図４)とし、1節点自由度は、Z軸方向のたわみ、X,Y軸回りの曲げの3自由度である。また要素として三角形板要素を使用した。

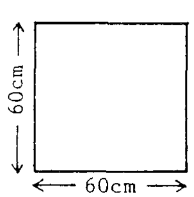

図１ 平板モデル

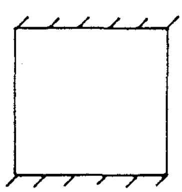
図２ 対辺固定

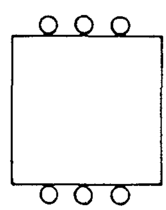
図３ 対辺単純支持

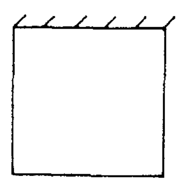
図４ 一辺固定

3-2 数値実験及び結果 ここでは不完全コレスキー分解を基本としたジェニングスらによるPreconditionerを用いる。これは For k = 2,3, ..., n

$$a_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}^2 \right)^{1/2} \quad \text{――― ①}$$

$$a_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij}a_{kj} \right)/a_{kk} \quad \text{――― ②}$$

というコレスキー分解をする過程で、　　Where k < n and i = k+1, k+2, ..., n

IF $a_{ij}^{*2} < \psi^2 a_{ii} a_{jj}$ ――― ③　THEN

$$a_{ii} = a_{ii} + \sqrt{a_{ij}^{*2} a_{ii}/a_{jj}} \quad \text{――― ④}$$

$$a_{jj} = a_{jj} + \sqrt{a_{ij}^{*2} a_{jj}/a_{ii}} \quad \text{――― ⑤}$$

という修正を加えるものである(a_{ij}^{*}は分解過程の非対角要素)。つまりパラメータψを大きくするとコレスキー分解される要素数は減少し、反復回数は増加する。逆にψを小さくすれば、分解要素数は増加し、特にψを0とすれば完全コレスキー分解となる。ψの設定はユーザー側が使用可能なコンピューターの容量などにより選択でき、現実に効果ある数値としては $0.1<\psi<0.4$ ぐらいまでとなる。パラメータψと収束回数(IT)及びコレスキー分解に要した要素の割合(IC)を表1(修正前)に示す。

表1 ψとIT,ICの関係

	対辺固定(153元)				対辺単純支持(146元)				一辺固定(304元)			
PSI	修正前のIC	IT	修正後のIC	IT	修正前のIC	IT	修正後のIC	IT	修正前のIC	IT	修正後のIC	IT
0.00	1.000	1	1.000	1	1.000	1	1.000	1	1.000	1	1.000	1
0.01	0.540	20	0.536	21	0.719	29	0.711	33	0.390	87	0.383	91
0.02	0.504	25	0.500	26	0.660	41	0.640	45	0.308	103	0.306	106
0.03	0.487	30	0.482	31	0.602	55	0.609	60	0.273	122	0.264	117
0.04	×		0.451	38	×		0.602	69	0.251	125	0.247	130
0.05	0.438	35	0.433	43	0.540	73	0.553	78	0.233	146	0.231	146
0.06	0.398	49	0.392	50	0.522	82	0.521	87	0.219	155	0.216	167
0.07	0.377	52	0.368	57	0.494	92	0.491	95	0.186	183	0.181	203
0.08	0.368	55	0.357	60	0.463	104	0.462	111	0.160	237	0.158	240
0.09	0.347	60	0.348	63	0.440	109	0.452	112	0.133	264	0.134	262
0.10	0.332	63	0.330	66	0.426	113	0.419	121	×		0.118	281

上記モデルにおいて、$0\leqq\psi\leqq0.1$ を数値実験を行った結果表1に示すとおり、対辺固定(ψ=0.04)、対辺単純支持(ψ=0.04)、一辺固定(ψ=0.10)、において分解不能が発生した。この原因としては、本来の完全コレスキー分解では、分解過程で発生するを全て評価するのに対して、不完全コレスキー分解ではある程度無視されること、またこの手法では不完全コレスキー分解の過程で a_{jj} は常に修正されるのに対して、a_{ii}はもしその行の最後の要素が式③に適合しない($a_{ij}^{*2} > \psi^2 a_{ii} a_{jj}$)ならば a_{ii}は修正されないという修正過程においての不公平さがあるの2点が挙げられる。これにより式①で($a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}^2$)の中が負となり分解不能となるのではないかと考えられる。

3-3 修正とその結果　修正の過程で上述した不公平さをなくすために式④を次のように改良する。

$$a_{ii} = a_{ii} + \mathrm{MAX}\left(\sqrt{a_{ij}^{*2} a_{ii}/a_{jj}}\right)$$

つまりその行の各要素における$\sqrt{a_{ij}^{*2} a_{ii}/a_{jj}}$の最大値で a_{ii} を修正するということである。この修正によりa_{ii}が過大評価され式①でのa_{kj}が小さくなる。その結果表1(修正後)にしめすとおり分解不能だったψにおいて分解可能となった。

4 あとがき

今までに提案されている修正共役傾斜法の一つである Robust Incomplete Choleski-Conjugate Gradient Method を改良することにより新しい修正共役傾斜法を提案した。この手法により板曲げなどにおいて計算不能となっていたのが計算可能になり、本論文での修正により安定な計算が期待できる。

〈参考文献〉

1)M.A.Ajiz,A.jennings、" A Robust Incomplete Choleski Conjugate Algorithm " ; International Journal for Numerical Methods in Engineering (1983)