

コンプリメンタリーエネルギー最小化によるラーメン構造物の材料非線形解析法について

愛媛大学工学部 正会員 ○大久保 禎二
観音寺市役所 正会員 牧 野 耕 司

1. まえがき

著者らはこれまでに、トラスおよびはり構造物の材料非線形解析に関して、エネルギー原理および数値計画法を用いて解析する方法を提案し、その信頼性、有効性を明らかにしているが^{1), 2)}、ここでは、これらの研究をさらに発展させ、各断面が曲げモーメントおよび軸力を受けるラーメン構造物の材料非線形解析を行う方法を提案し、変位法による解との比較・検討を行った結果について述べるものである。

2. コンプリメンタリーエネルギー最小化によるラーメン構造物の材料非線形解析問題の定式化

周知のごとく、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、つり合い条件および境界条件を満たす種々の応力分布の中で、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーが最小となる応力分布が真の解となる。

そこで本研究ではまず、ラーメン構造物を図-1(a) に示すように各節点で切断し、静定基本系を仮定する。節点*j*および*k*で切断した部材*i*の端力を図-1(b) に示すように定義すると、部材*i*全体に関する3つの力のつり合い条件より未知部材端力を図-1(c) に示すように3個に減少させることができる。この H_{ij} , M_{ij} , M_{ik} を用いることにより部材*i*の任意点*x*における軸力 N_{ix} および曲げモーメント M_{ix} が計算でき、この N_{ix} , M_{ix} を用いて、3.で述べる方法により部材*i*のコンプリメンタリーエネルギー Π_{ci} およびそれらを全部材について加え合わせた構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を計算することができる。このように Π_{ci} および Π_c は式(1)のごとく H_{ij} , M_{ij} , M_{ik} の関数として表わすことができる。

$$\Pi_c = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(X_i) = \Pi_c(X) \quad (1)$$

ここに、 $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$, n : 部材数

$$X_i = [H_{ij}, M_{ij}, M_{ik}]^T = [X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}]^T$$

次に、各節点におけるつり合い条件 $\sum H=0$, $\sum V=0$, $\sum M=0$ を導入する。図-1(b) に示す部材端力を H_{ij} , M_{ij} , M_{ik} を用いてマトリックス表示し、これを全部材についてまとめて表現すると、全可動節点における力のつり合い方程式は次式のように表わされる。

$$F - TA = F - TK - TBX = 0 \quad (2)$$

ここに、 T : 部材座標系から全体座標系への変換マトリックス ($m \times 6n$)
 F : 各可動節点に作用する外力ベクトル, m : 自由度数, A : 各部材の部材端力ベクトル, K : 各部材の部材間に作用する外力ベクトル,
 B : A と X の関係を表わす $6n \times 3n$ のマトリックス

以上より、ラーメン構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は次式のように定式化できる。

$$\text{find } X, \quad \text{Such that}$$

$$\text{minimize } \Pi_c(X) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(X_i) \quad \text{subject to } g = P - CX = 0 \quad (3)$$

ここに、 $g = [g_1(X), \dots, g_m(X)]^T$ は各可動節点における力の

つり合い方程式, $P = F - TK$, $C = TB$

式(3)の線形制約条件付き最小化問題は、これまでトラス構造物の材料非線形解析に適用してその信頼性・有効性が明らかとなっている逐次二次計画法(SQP) およびLPの手法を用いて解くことができる¹⁾。

3. 構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの算定

ラーメン構造物の各部材のコンプリメンタリーエネルギーを計算する場合には、まず軸力 N および曲げモーメント M を受ける部材断面のひずみ分布および応力度分布を決定しなければならない。図-2に示すような非線形の材料からなる部材*i*の任意点*x*の断面に軸力 N_{ix} および曲げモーメント M_{ix} が作用する場合、その断面

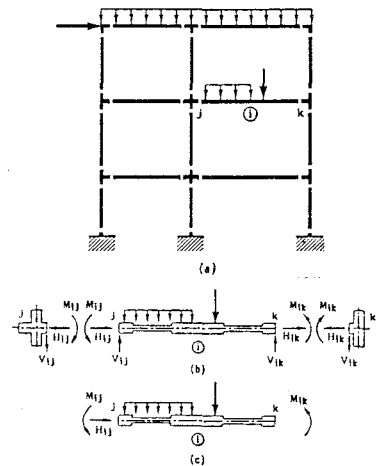


図-1 ラーメン構造物およびその部材要素

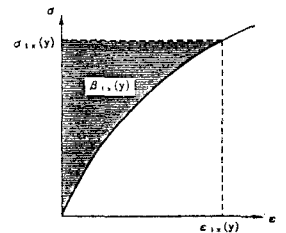


図-2 非線形応力度-ひずみ関係

のひずみ分布 $\varepsilon_{ix}(y)$ および応力度分布 $\sigma_{ix}(y)$ は平面保持の仮定および内力と作用力のつり合い条件を用いて文献3)の方法で決定することができる。求められた応力度分布 $\sigma_{ix}(y)$ を用いて、部材 i の点 x における部材断面(断面積 $A_i(x)$)のコンプリメンタリーエネルギー $\pi_{ci}(x)$ は次式により計算される。

$$\pi_{ci}(x) = \int_{A_i(x)} \beta_{ix}(y) dA, \quad \beta_{ix}(y) = \int_0^{\sigma_{ix}(y)} \varepsilon(\sigma) d\sigma \quad (4)$$

ここに、 $\beta_{ix}(y): A_i(x)$ の下縁より y の距離の断面要素におけるコンプリメンタリーエネルギー密度

式(4)の $\pi_{ci}(x)$ を部材 i の全長にわたって積分することにより、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー Π_{ci} を求めることができる。

$$\Pi_{ci} = \int \pi_{ci}(x) dx \quad (5) \quad \text{ここに、} l_i: \text{部材 } i \text{ の長さ}$$

本研究では、式(5)の積分計算をシンプソンの公式を用いて行っている。こうして求めた Π_{ci} を全部材について加え合わせれば、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーが得られる。

4. 解析結果および変位法との比較

表一1に、図一4に示す二径間ラーメンが図一3に示す材料Bよりなる場合の解析結果および変位法による解との比較、表一2に本解析法と変位法の所要計算時間および反復計算回数の比較を示す。両解法による解の相対誤差はほとんどすべての部材端力において0.00~1.00%の範囲であり、両解法の解はきわめて良く一致しているといえる。次に本研究の方法による解の収束性は、表一2より明らかなように、不静定次数が少なく、応力度-ひずみ関係曲線がなめらかなほど解の収束性は良くなっている。しかし、収束性の悪い場合でも30回程度で収束し実用性は高い。また、最終解を得るために必要とした計算時間は、比較的部材数の少ないラーメン構造物では変位法の方が本研究の解法と比較して少ない計算時間で解を得ているが、部材数が多くなるに従い逆に本解析法の方が少ない計算時間となっている。

以上の検討結果より、本解析法は定式化が単純であり、いかなる非線形材料に対しても全く同様に適用でき、変位法などの有限要素法のように解の精度を上げるために要素の分割を小さくする必要がなく、きわめてわずかの計算機の記憶容量で解くことが可能であり、しかも部材数が増加するに従い、変位法と比較してより少ない計算時間できわめて信頼性の高い解が得られることが明らかとなった。

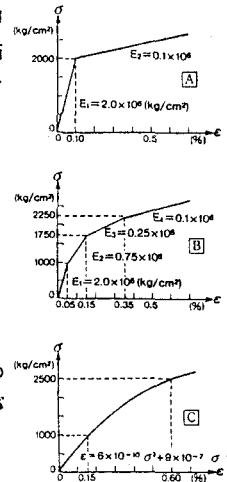
表一2 所要計算時間(分)および反復回数の比較¹⁾

解析モデル		1		2		3		4	
部材数	不静定次数	3	3	9	4	5	6	10	12
A ²⁾	CEM ³⁾	0.522 (16)	0.707 (24)	0.826 (27)	1.903 (31)				
	FEM ⁴⁾	0.208 (13)	1.869 (29)	0.669 (15)	** 40(103)				
B	CEM	0.565 (15)	1.145 (22)	1.002 (23)	2.682 (31)				
	FEM	0.232 (12)	1.022 (15)	0.579 (12)	6.800 (17)				
C	CEM	0.190 (13)	0.329 (15)	0.368 (15)	1.211 (25)				
	FEM	0.147 (9)	0.614 (9)	0.383 (8)	3.599 (9)				

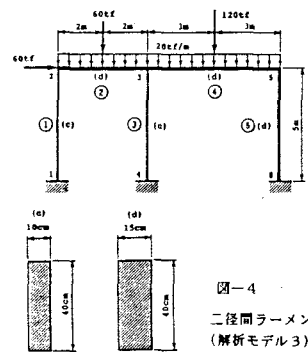
1) FACOM M-360AP による計算結果 2) 材種 3) エネルギー法

4) 変位法 (ただし、() 内の数値は反復回数を表す。)

** 収束せず (EA, EI の最大の変化量の割合 = 0.0008)



図一3 3種類の非線形材料の応力度-ひずみ関係



図一4
二径間ラーメン
(解析モデル3)

表一1 二径間ラーメンの解析結果および変位法との比較

材種	材 料 B			
解析方法	ENERGY法	変位法	誤 差 ¹⁾	$\varepsilon_e / \varepsilon_s$
$H_{1,1}$	30.81	30.87	0.194%	0.084%
$M_{1,1}$	40.29	40.05	0.599%	-0.095%
$H_{2,1}$	46.94	47.03	0.191%	-0.035%
$M_{2,1}$	-25.00	-24.78	0.888%	-0.027%
$H_{2,2}$	-46.94	-47.03	0.191%	0.555%
$M_{2,2}$	-131.75	-131.75	0.000%	-0.591%
$H_{1,2}$	231.57	231.48	0.039%	-0.041%
$M_{1,2}$	-6.49	-6.44	0.776%	-0.017%
$H_{1,3}$	-231.57	-231.48	0.039%	-0.084%
$M_{1,3}$	23.02	23.00	0.087%	0.019%
$H_{1,4}$	43.64	43.72	0.183%	0.675%
$M_{1,4}$	138.24	138.19	0.036%	-0.714%
$H_{1,5}$	117.62	117.66	0.034%	0.424%
$M_{1,5}$	123.97	124.13	0.129%	-0.501%
$H_{1,6}$	-117.62	-117.66	0.034%	-0.231%
$M_{1,6}$	94.22	94.48	0.275%	0.188%
CPU(ITE) ¹⁾	1.002(23)	0.579(12)		

1) 部材端力(Lf) 2) 部材端曲げモーメント(Lf-m)

3) FACOM M-360AP による計算時間(分)

(ただし、() 内の数値は反復計算回数を表す)

4) ENERGY法による解と変位法による解の相対誤差 (Lf=9.81kN)

参考文献: 1) 大久保, 和多田: "エネルギー原理およびS Q Pによるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究" 土学論, 1986. 10. 2) 大久保, 藤脇: "コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法", 土学論, 1988. 10. 3) 大久保, 牧野: 平成元年度土木学会中四国支部講演概要集