

曲げと軸力を受ける非線形材料部材の応力度分布および仮想剛性の一算定法について

愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二
観音寺市役所 正会員 ○牧 野 耕 司

1. まえがき

著者らはこれまでに、材料の非線形性を考慮したはり断面に関する曲げモーメントと最外縁ひずみの関係を導入し、この関係曲線から算定される各はり要素の仮想曲げ剛性を用いて、変位法によりはり構造物の材料非線形解析が行えることを明らかにしているが¹⁾ここでは、曲げモーメントと軸力を受ける部材断面の上下縁ひずみを力のつり合い方程式により決定し、これから算定される仮想曲げ剛性および仮想軸剛性を用いて変位法による計算を反復することにより、ラーメン構造物の材料非線形解析を行う方法について発表するものである。

2. 曲げモーメントおよび軸力を受ける部材断面のひずみおよび応力度分布の決定

図-1に示すような非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料からなる部材断面が曲げモーメント M および軸力 N を受ける場合、この断面の応力度分布 $\sigma(y)$ はひずみ分布、および内力と作用力のつり合い条件を満足するように次のように決定される。

いま、 M と N を受ける部材断面のひずみ分布が、作用応力の大きさに関係なく常にBernoulli-Eulerの平面保持の仮定を満足するものとする、部材の上下縁ひずみ ϵ_u, ϵ_d を仮定することにより、断面の下縁から y の距離におけるひずみ $\epsilon(y)$ は次式により計算される。(図-2参照)

$$\epsilon(y) = \epsilon_d + \frac{\epsilon_u - \epsilon_d}{H} \cdot y \quad (1) \quad \text{ここに、} H : \text{部材断面の高さ}$$

また、 $\epsilon(y)$ に対応する応力度は材料の応力度-ひずみ関係より直接求められ、この応力度分布 $\sigma(y) = \Phi(\epsilon_u, \epsilon_d, y)$ は、断面(断面積 A)における内力と作用力のつり合い条件より次式を満足しなければならない。

$$\int_A \Phi(\epsilon_u, \epsilon_d, y) dA = N \quad (2)$$

$$-\int_A \Phi(\epsilon_u, \epsilon_d, y) \cdot y dA = M - N \cdot y_0$$

ここに、 y_0 : 断面の下縁から図心軸までの距離

式(2)は ϵ_u, ϵ_d を未知変数とする連立非線形方程式であり、この方程式を解くことにより与えられた M, N に対する ϵ_u, ϵ_d を求めることができる。さらに式(1)よりひずみ分布 $\epsilon(y)$ が、応力度-ひずみ関係より $\epsilon(y)$ に対する応力度分布 $\sigma(y)$ が求められる。

本研究では式(2)の ϵ_u, ϵ_d に関する連立非線形方程式をNewton-Raphson法を用いて解いている。この場合、解を決定する反復公式は次式で与えられる。

$$r^{k+1} = r^k + J^{k-1} S \quad (3) \quad , \quad J^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_N}{\partial \epsilon_u} & \frac{\partial f_N}{\partial \epsilon_d} \\ \frac{\partial f_M}{\partial \epsilon_u} & \frac{\partial f_M}{\partial \epsilon_d} \end{bmatrix}$$

ここに、 $r^k = [\epsilon_u^k, \epsilon_d^k]^T$, $r^{k+1} = [\epsilon_u^{k+1}, \epsilon_d^{k+1}]^T$,

$$S = [N - f_N(r^k), M - N y_0 - f_M(r^k)]^T$$

上式のヤコビ行列の各成分は、差分により近似的に求めている。本研究では、収束判定基準として ϵ_u および ϵ_d の変化率が 1.0×10^{-6} 以下となった時点で収束したものと判定したが、計算例より、収束判定基準値が $10^{-7} \sim 10^{-5}$ の範囲ではいかなる値を用いても5~10回程度の反復回数で収束することが明らかとなっている。

3. 変位法による解析手順

まず、ラーメン構造物を長さ Δl の微小要素に分割し、各要素断面に作用する M および N を仮定し、仮想軸剛性 $\overline{EA}$ を式(4)により、仮想曲げ剛性 $\overline{EI}$ を2.で求めた ϵ_u, ϵ_d を用いて式(5)により算定する。

$$\overline{EA} = \frac{N}{\epsilon_N} \quad (4) \quad \overline{EI} = \frac{M \cdot H}{\epsilon_d - \epsilon_u} \quad (5) \quad \text{ここに、} \epsilon_N : \sigma_N = N/A \text{ に対応するひずみ}$$

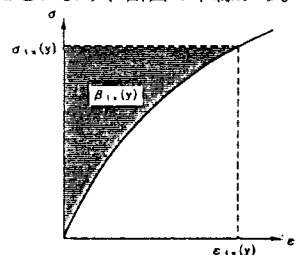


図-1 非線形応力度-ひずみ関係

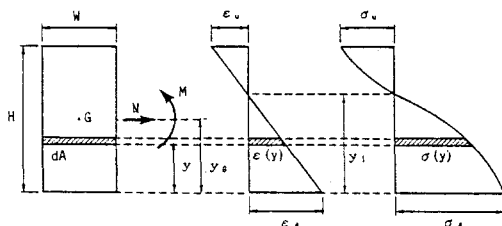


図-2 部材断面のひずみおよび応力度分布

このEA, EIを用いて変位法によりM, Nを求め、式(4)、(5)によりEA, EIを改良する。このようにしてM, N, EA, EIが一定値に収束するまで計算を繰り返すことにより、ラーメン構造物の曲げモーメントおよび軸力分布を求めることができる。

4. 解析例

本解析法においては、ラーメン構造物の分割要素長 Δl がより小さいほど正確な解が得られるが、その半面多くの計算時間を要することとなる。そこで本研究では、種々の解析モデルについて Δl を5cm, 10cm, 20cmと変化させて解析を行い、解の精度と計算時間の関係を検討した。なお、解析にあたっては、剛性マトリックスのバンド幅ができるだけ小さくなるように節点番号を付し、連立一次方程式をガウスの消去法で解く際に必要となる計算機の記憶容量および計算時間が少なくなるように工夫している。解の収束判定基準としては、EA, EI, N, Mの変化率が 1.0×10^{-4} 以下となった時点で収束したものと判定した。

表-1は、図-4に示す二径間ラーメンを図-3に示す非線形材料A, B, Cについて解析した結果を示している。表中における H_{ij} および M_{ij} は、それぞれ部材 i の節点 j における部材端軸力および部材端曲げモーメントを表わしている。

表-1より、 $\Delta l=5\text{cm}$ と $\Delta l=10\text{cm}$ および $\Delta l=20\text{cm}$ の場合の解の相対誤差は、絶対値の比較的大きな部材力についてみると、それぞれ、材料Aで0.00~0.07%, 0.00~0.39%, 材料Bで0.00~0.07%, 0.02~0.32%, 材料Cで0.00~0.04%, 0.00~0.09%となっており、 $\Delta l=20\text{cm}$ とすると $\Delta l=5\text{cm}$ の場合と比較して解の誤差が急に増大している。また、最終解を決定するために必要とした計算時間は、 $\Delta l=5\text{cm}$ の場合と比較して $\Delta l=10\text{cm}$ および $\Delta l=20\text{cm}$ の場合、それぞれ約1/4および1/12となっており、ほぼ Δl の比の2乗のオーダーで計算時間が増大していることがわかる。以上の結果より、図-4に示す規模のラーメン構造物では、解の精度および計算時間を考慮して、分割要素長 Δl としては10cm程度で十分であるといえることができる。しかし、図-4に示す二層二径間ラーメンの材料Aで $\Delta l=10\text{cm}$, 20cmの場合には、100回程度の反復計算にもかかわらずそれぞれの解の精度が1/1000程度と、他の計算例と比較して収束状況が極めて悪かった。このように、問題の条件によっては必ずしも表-1のように能率的に精度のよい解が得られるとは限らない。

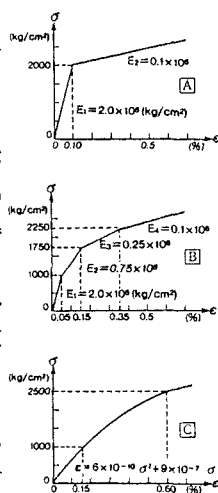
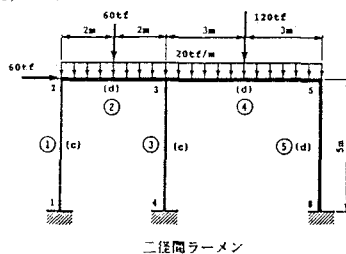
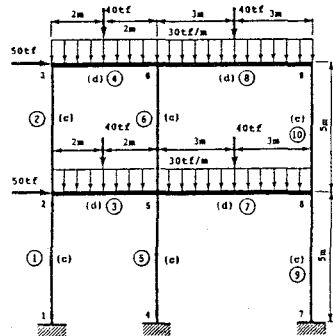


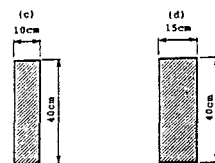
図-3 3種類の非線形材料の応力度-ひずみ関係



二径間ラーメン



二層二径間ラーメン



部材断面

図-4 ラーメン構造物の解析モデル

表-1 Δl の大きさが解析精度および計算時間に与える影響
(二径間ラーメン)

	材料A			材料B			材料C		
Δl (cm)	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2
$H_{1,1}$	31.70	31.68	31.58	30.89	30.87	30.79	30.25	30.24	30.23
$M_{1,1}$	33.22	33.20	33.09	40.06	40.05	40.00	36.93	36.92	36.92
$H_{2,2}$	49.55	49.56	49.58	47.03	47.03	47.04	48.05	48.05	48.05
$M_{2,2}$	-19.00	-19.00	-19.00	-24.78	-24.78	-24.80	-22.82	-22.83	-22.84
$H_{3,3}$	-49.55	-49.56	-49.58	-47.03	-47.03	-47.04	-48.05	-48.05	-48.05
$M_{3,3}$	-134.19	-134.28	-134.69	-131.68	-131.75	-132.05	-136.19	-136.20	-136.24
$H_{4,4}$	229.63	229.66	229.80	231.45	231.48	231.60	231.66	231.67	231.69
$M_{4,4}$	-1.69	-1.65	-1.47	-6.47	-6.44	-6.32	2.25	2.25	2.26
$H_{1,4}$	-229.63	-229.66	-229.80	-231.45	-231.48	-231.60	-231.66	-231.67	-231.69
$M_{1,4}$	22.66	22.66	22.64	23.00	23.00	22.99	23.07	23.07	23.05
$H_{2,4}$	45.36	45.36	45.35	43.73	43.72	43.70	42.99	42.99	42.99
$M_{2,4}$	135.89	135.93	136.16	138.15	138.19	138.37	133.95	133.95	133.98
$H_{3,4}$	118.66	118.66	118.62	117.66	117.66	117.62	118.09	118.09	118.08
$M_{3,4}$	127.87	127.88	127.89	124.14	124.13	124.07	122.48	122.48	122.48
$H_{4,4}$	-118.66	-118.66	-118.62	-117.66	-117.66	-117.62	-118.09	-118.09	-118.08
$M_{4,4}$	98.92	98.91	98.85	94.48	94.48	94.45	92.45	92.45	92.45
CPU (ITE)	2.826(15)	0.669(15)	0.216(15)	2.340(12)	0.579(12)	0.197(12)	1.560(8)	0.383(8)	0.135(8)

1) 各断面における ϵ , ϵ_c の収束判定基準 2) 分割要素長(m)
3) 部材端軸力(kN) 4) 部材端曲げモーメント(kN-m)
5) FACOM M-360APによる計算時間(min) (ただし、()内の数値は反復計算回数を表す) (ITE=9.81kN)

参考文献: 1) 大久保禎二, 藤脇敏夫: "コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法", 土木学会論文集, 1988. 10.