河川水質モデルに関する一考察
⊿ｔの取り扱いとボックスの可変分割について

山口大学工学部　正員○関根雅彦
山口大学工学部　正員　浮田正夫
山口大学工学部　正員　中西　弘
日本上下水道設計　篠永典之

1．はじめに　著者らはこれまで、河川における汚濁物質の挙動を定量的に把握するため、数理計画法を用いた係数探索でモデルの計算値を実測値に適合させることにより、モデルの係数値を求めようとしてきた。[1)]本法では１回の計算に数十回も20～50日にわたる水質シミュレーションを繰り返すため、モデル計算に要する時間は少しでも短い方が良い。本報告では、モデルの基礎式として一般に用いられているオイラー型と、もう一つの選択肢としてのラグランジュ型をとりあげ、計算時間と精度についていずれが有利であるかを考察した。

2．基礎式　以下では、特に指定のない限り単位系は距離[m],水質濃度[mg/l],時間[day]とする。考察のためのモデルとして、流下距離1000の途中流入・出のない河川区間において、その上流端での水質濃度C0と流速 Uから下流端の水質濃度Cdを求める問題を考える。流下方向１次元モデルと考え、拡散に比べ移流の効果が卓越していると仮定すると、基礎式は表１となる。(1)、(2)式の右辺は反応項であり、文献１）にも見られるように現実には多数の要因が関係してくるが、ここでは問題を簡明にするため、濃度の１次に比例して分解するとした。

表１　基礎式

	オイラー型	ラグランジュ型
微分式	$\frac{dC}{dt}+U\frac{dC}{dx}=-K\cdot C$ …(1)	$\frac{DC}{Dt}=-K\cdot C$ …(2)
差分式	$Ci^{t+1}=U\cdot(Ci\text{-}1^{t}-Ci^{t})/\varDelta x\cdot\varDelta t-Ci^{t}\cdot(1-K'\cdot\varDelta t)$ …(3)	$C^{t+1}=C^{t}\cdot(1-K'\cdot\varDelta t)$ …(4)
C：濃度　U：流速　x：位置　t：時間　K、K'：反応に係わる係数 添字のi,t：離散化した位置、時刻　⊿x，⊿t：位置、時間の離散化間隔 D／Dt：実質微分[2)]　差分式は時間に関して前進、位置に関して後退		

実際の濃度変化がある微分方程式で表現されると考えて実測値と合致するような(1)または(2)式のKを求めようとするわけだが、実際にはこれを差分化した(3)または(4)式のK'を求めることになる。いま、差分式を用いて実測値と合致する係数を求めるとすると、図１に示されるように、⊿ｔの取り方によって同じ濃度変化に対して異なったK'が得られることになる。従って、求められた係数値で複数の河川の特性を論ずる場合、各計算で用いた⊿ｔが等しい事が要件となる。

なお、(2)式については解析的に

$Cd=C0\cdot\exp(-K\cdot t)$ …(5)（ｔは下流端までの流下時間）

が得られる。(5)式による下流濃度を解析解とする。

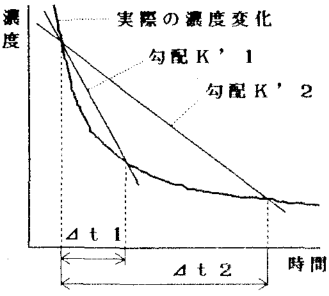

図１　⊿ｔの相違による係数探索結果の誤差

3．オイラー型の問題点　通常オイラー型では、⊿ｔ，⊿ｘは定数であり、河川をいくつかのBOXに分割し、BOX毎の濃度を計算する。ところで、差分式が安定であるためには、条件１：$U/(\varDelta X/\varDelta t)\leqq 1$ および条件２：$K'\cdot\varDelta t<1$ を満たさなければならない。条件１はC.F.L.条件[3)]と呼ばれるものである。条件１、２が満たされない場合、解が不安定となり、場合によっては発散を起こす。種々の流速と⊿ｔに対して、条件１を満たすために必要な最大BOX数を表２に示す。　通常の河川において、流速が　0.1～1

[m/sec]の変動幅を持つ事は十分に有り得ることであるから、⊿t＝0.01ではBOX数は1、⊿t＝0.001でもBOX数は11以下でなければならない。BOX数1および10に対する解の挙動の違いを表３に示す。この場合の流下時間は0.115であるが、BOX数1ではt＝0.02から下流濃度に上流の影響が及んでいる。一方、BOX数10ではほぼ流下時間付近で濃度変化が生じる。つまりBOX数が少ないと、河川が完全混合槽として扱われることになり、見かけの拡散が非常に大きいような計算結果を生じる。従って、BOX数をできるだけ多く取りたいが、そのためには⊿tを小さくしなければならず、計算時間が極端に長くなるというジレンマが生じる。

表２　C.F.L.条件を満たすための最大ＢＯＸ数

⊿t [day]	流速 [m/sec] 0.1	0.25	0.5	0.75	1
1	0	0	0	0	0
0.1	1	0	0	0	0
0.01	11	4	2	1	1
0.001	115	46	23	15	11
0.0001	1157	462	231	154	115

表３　ＢＯＸ分割数が解に与える影響

時間 [day]	上流濃度 [mg/l]	下流濃度 [mg/l] BOX分割数（C.F.L条件） 1(0.086)	10(0.864)
0.00	0.5	0.445	0.445
0.01	0.1	0.446	0.445
0.02	0.1	0.411	0.445
0.03	0.1	0.380	0.445
0.04	0.1	0.352	0.445
0.05	0.1	0.327	0.445
0.06	0.1	0.304	0.446
0.07	0.1	0.283	0.446
0.08	0.1	0.265	0.446
0.09	0.1	0.248	0.446
0.10	0.1	0.233	0.446
0.11	0.1	0.219	0.353
0.12	0.1	0.206	0.236
0.13	0.1	0.195	0.155
0.14	0.1	0.185	0.114
0.15	0.1	0.176	0.098
0.16	0.1	0.167	0.092
0.17	0.1	0.160	0.090
0.18	0.1	0.153	0.089
0.69	0.1	0.089	0.089
K=1, U=0.1, 下流濃度解析解=0.089			

４．ラグランジュ型の利点

(2)式で明らかなようにラグランジュ型ではxを考えなくても良い。正確に言えば、⊿t＝U／⊿xであり、tはxを含んでいる。また、この関係から条件１は自動的に満たされている。概念的には、⊿x可変の完全押し出し流れモデルである。従って最大流速時の流下時間より小さい値を⊿tとして選んでやれば、流速に応じて自動的に⊿xが変化するのと同じ効果が生じる。

ここで、解析的に求めた下流濃度とモデルによる下流濃度が一致するように係数探索を行った。（表４）　この場合、K'／Kが１に近いほど、近似度が良好であるといえる。

表より、例えばK＝20の場合に着目すると、オイラー型では流速が変わっても一定であるべきK'の値が変動している。一方、ラグランジュ型ではK'は絶対値的にはKとやや異なる値となるものの、流速には影響を受けていない。これより、種々の流況において河川の特性を抽出しようとする場合、ラグランジュ型でなければ正当な結果は得られないといえる。（なお、K＝20はかなり大きな値ではあるが、例えば巻き上げ・沈降等の現象では有り得ない値ではない。）

また、計算に要する時間もラグランジュ型はオイラー型の２～５０分の１であった。

５．結論

⊿t、⊿xを十分小さく取れば差分式の微分方程式への近似度が高まり、ラグランジュ型もオイラー型も同じ結果をもたらす。しかし限られた資源（時間・金・記憶容量）でより精度の高い計算を行うためには、ラグランジュ型がはるかに有利である。

<参考文献>

1）関根他:衛生工学研究論文集(23) p.65(1987)

2）平岡,田中:移動現象論，朝倉,p.10 (1971)

3)土木学会編：土木工学における数値解析／基礎編,ｻｲｴﾝｽ社,p.71(1974)

表４　係数探索結果の解析解との比較

		K [1/d]	K' [1/day] 流速 [m/sec] 0.1	0.5	1	K'／K [-] 流速 [m/sec] 0.1	0.5	1
ラグランジュ型	⊿t= 0.01 [day]	0.1	0.10	0.10	0.10	1.00	1.00	1.00
		1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		10	9.53	9.56	9.57	0.95	0.96	0.96
		20	18.16	18.28	18.31	0.91	0.91	0.92
	⊿t= 0.001	0.1	0.10	0.10	0.10	1.00	1.00	1.00
		1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		10	9.95	9.95	9.95	0.99	1.00	1.00
		20	19.80	19.80	19.81	0.99	0.99	0.99
オイラー型	⊿t= 0.01 box= 1	0.1	0.10	0.10	0.10	1.01	1.00	1.00
		1	1.06	1.01	1.01	1.06	1.01	1.01
		10	18.85	11.25	10.60	1.88	1.13	1.06
		20	78.82	25.44	22.50	3.94	1.27	1.13
	⊿t= 0.001 box= 11	0.1	0.10	0.10	0.10	1.00	1.00	1.00
		1	1.01	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00
		10	10.55	10.11	10.05	1.05	1.01	1.01
		20	22.26	20.43	20.21	1.11	1.02	1.01

K　：解析解を求めた係数値
K'：解析解と等しい数値解を与える差分式の係数値