F. E. M. におけるDynamic relaxation法の適用とその性質

(株)大本組　正員　○鈴木昌次　岡山大学　正員　谷口健男

1. まえがき

FEMにおける構造モデルの大型化に伴い，大次元疎行列の連立一次方程式解法に関する研究が活発に行なわれている。多くは，前処理付きCG法を中心とした研究であるが[4,5]，ここでは巡回型反復法の一つであるDynamic relaxation法(以下，DR法)に着目し，Isoparametric要素を用いたFEM解析への適用性を検討する。さらに，前処理付きDR法の適用を試みる。尚，DR法はDay, Otter等により開発され，FDM解析において有効に利用されている[7]。FEM解析に対してはLinch等による，定歪み要素を用いた解析例がある[3]。

2. DR法の定式化

時間に関して一定な衝撃的荷重が構造系に作用したとき，系は振動を始め時間の経過とともに加速度，速度は零に，変位は，ある一定値に収束する。振動の運動方程式は(1)式である。いま，$\ddot{x}$，$\dot{x}$は中央差分を用いて(2)，(3)式で表せる。(2)，(3)式を(1)式に代入し，$M=\rho D$，$C=hD$，$\alpha=ht/\rho$，$\beta=t^2/\rho$ (ρ，hは定数)とおくと(4)式を得る。右肩添え字kは時間ｽﾃｯﾌﾟ。

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f \quad (1) \qquad \ddot{x}=(x^{k-1}-2x^k+x^{k+1})/t^2 \quad (2)$$

$$\dot{x}=(x^{k+1}-x^{k-1})/2t \quad (3)$$

$$Dx^{k+1}=\frac{4}{2+\alpha}Dx^k-\frac{2-\alpha}{2+\alpha}Dx^{k-1}+\frac{2\beta}{2+\alpha}(f-Kx^k) \quad (4)$$

M:質量ﾏﾄﾘｯｸｽ　C:減衰ﾏﾄﾘｯｸｽ　K:剛性ﾏﾄﾘｯｸｽ

f:荷重ﾍﾞｸﾄﾙ　x:加速度ﾍﾞｸﾄﾙ　x:速度ﾍﾞｸﾄﾙ

x:変位ﾍﾞｸﾄﾙ　t:差分時間幅　D:Kの対角ﾏﾄﾘｯｸｽ

ここで，(4)式の左側から$D^{-1/2}$を乗じて，$y^k=D^{1/2}x^k$，$a=D^{-1/2}f$，$B=D^{-1/2}KD^{-1/2}$とおくと，DR法の反復式(5)を得る。実際の反復時には，初期値$\varepsilon^0=\{0\}$，$r^0=a$とし，$\|r^k\|_1/\|a\|_1$が十分小さくなったときを収束とする。解は$x=D^{-1/2}y$でもとまる。

$$y^{k+1}=y^k+\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\varepsilon^k+\frac{2\beta}{2+\alpha}r^k \quad (5)$$

$\varepsilon^k=(y^k-y^{k-1})$:誤差ﾍﾞｸﾄﾙ　$r^k=(a-By^k)$:残差ﾍﾞｸﾄﾙ

以上の定式はLinch等とは異なるが，反復ﾏﾄﾘｯｸｽBの構造以外には同様の反復式となり，反復ﾊﾟﾗﾒｰﾀα，βはLinch等の定義した(6)，(7)式が適用できる[3]。

$$\alpha=4\sqrt{\gamma_{min}\cdot\gamma_{max}}/(\gamma_{min}+\gamma_{max}) \quad (6)$$

$$\beta=4/(\gamma_{min}+\gamma_{max}) \quad (7)$$

γ_{min}:Bの最小固有値　γ_{max}:Bの最大固有値

3. 解析例

ここでは，図-1に示す6ﾓﾃﾞﾙの解析を行ない，CG法との比較を行なった。α，β値はﾊﾟﾗﾒﾄﾘｯｸに変化させ，また，Bの実固有値も同時に求めた。収束判定値は10^{-6}とした。表-1に最適ﾊﾟﾗﾒｰﾀ値，反復回数を示す。(表中γ_nは実固有値，γ_{min}，γ_{max}は最適推定固有値)

表-1 解析結果

	MODEL1	MODEL2	MODEL3	MODEL4	MODEL5	MODEL6
DOF	50	180	390	323	1051	760
γ_1	2.4132	2.1043	2.1035	3.3195		3.4540
γ_2	2.3933	2.0993	2.1011	2.9473		3.0387
γ_3	2.1922	2.0512	2.0770	2.8682		3.0232
γ_{n-2}	.06482	.01994	.00893	.00111		.00660
γ_{n-1}	.05459	.01192	.00530	.00095		.00351
γ_n	.00762	.00196	.00087	.00055		.00167
γ_{min}	0.05	0.0119	0.005	.00055	0.0024	.0022
γ_{max}	2.4132	2.1043	2.1035	3.3195	3.7	3.5
DR_{iter}	67	132	187	513	268	331
CG_{iter}	26	58	84	731	611	200

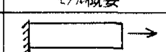
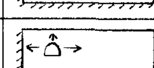
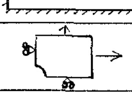
ﾓﾃﾞﾙ	解析内容	要素	ﾓﾃﾞﾙ概要
1	平板引っ張り	平面応力膜	
2	平板引っ張り	平面応力膜	同上
3	平板引っ張り	平面応力膜	同上
4	地盤初期応力	2次元連続体 2次元梁 (平面歪み)	
5	地盤空洞掘削	2次元連続体 (平面歪み)	
6	円孔板引っ張り	平面応力膜	

図-1 解析ﾓﾃﾞﾙ

解析結果を以下に列記する。

1. Linch等の定義したα，βはγ_{min}について，必ずしもBの最小固有値で最適とはならず，n次の反復ﾏﾄﾘｯｸｽにおいてγ_n，γ_{n-1}が1ｵｰﾀﾞｰ以上離れている場合には，$\gamma_{min}=\gamma_{n-1}$とする方が良い。(表-1)

2. γ_{max}は$\gamma_{max}\geqq\gamma_1$であれば多少の変動があっても，解の収束に与える影響は少ない。但し，$\gamma_{max}<\gamma$

$_{1}$の場合は，確実に解の発散を招く。(表-2)

3．構造系が比較的振動し易い場合には，DR法の収束は極端に悪化する。例えば，モデル1に曲げ板要素を用い面外荷重を作用させた場合，CG法が142回で収束したのに対しDR法は1049回を必要とした。ところが，振動しにくい地盤モデルのような場合には急速に収束している。

表-2 モデル5のパラメータ解析結果

NO	γ_{min}	γ_{max}	ITER
1	0.0005	3.5	発散
2	0.0005	3.6	＞1000
3	0.0005	3.7	574
4	0.0005	3.8	579
5	0.0005	4.0	587
6	0.0008	3.7	460
7	0.001	3.7	405
8	0.0012	3.7	373
9	0.0015	3.7	337
10	0.002	3.7	291
11	0.0022	3.7	281
12	0.0024	3.7	268
13	0.0026	3.7	291

4．DR法の反復マトリックスはスケーリングによる前処理を施したと同様に対角要素が1に正規化されており，元数Nの係数行列を一次元配列(非零要素数NA個)とし，倍精度演算を行なうとき，N個の非零要素の記憶域，1回の反復計算中のN回の積和演算の回数が省略できる。これを含め，CG法と対比すると，記憶容量につきCG法は(3NA+9N)語，DR法は(3NA+7N)語を必要とする。また，積和演算の回数につきCG法は(2NA+6N)回/1iter，DR法は(2NA+2N)回/1iterとなる。図-2は反復計算のCPU時間をプロットしたものである。

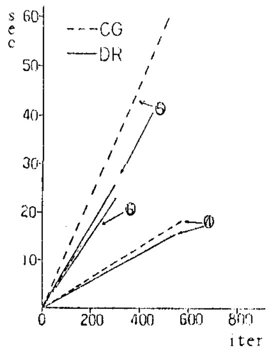


図-2 演算時間の比較

4．不完全コレスキー分解による前処理の適用

CG法に用いられる不完全コレスキー分解手法は，反復マトリックスにおける固有値分布の改善を目的としている。そこで，DR法に対しても，これを適用し解の収束性の改善を試みた(ここではROBUSTアルゴリズムを利用した[6])。(5)式を書き直すと，

$$\varepsilon^{k+1} = \frac{2-\alpha}{2+\alpha}\varepsilon^{k} + \frac{2\beta}{2+\alpha}(a-By^{k}) \qquad (8)$$

ここで，LをBの不完全コレスキー分解後の下三角マトリックスとして，$n=L^{-1}a$, $M=L^{-1}BL^{-T}$, $z=L^{T}y$とおくと，

$$z^{k+1} = z^{k} + \frac{2-\alpha}{2+\alpha}(z^{k}-z^{k-1}) + \frac{2\beta}{2+\alpha}(n-Mz^{k}) \qquad (9)$$

(9)式よりzの収束解を算出し，$x=D^{-1/2}L^{-T}z$より元の方程式の解を得る。上記の定式に従ってモデル4，5，6の解析を行なった結果を表-3に示す。CG法ほどの改善は見られないが，明らかに反復回数は減少している。さらに，表-4の反復パラメータの変化を見ると，解の収束に対する反復パラメータの感度が，無処理の場合に比し非常に鈍くなっているのが分かる。この結果から，以下のことが言える。

表-3 収束回数

モデル	反復数	
	DR	CG
4	68	34
5	40	26
6	55	25

1)巡回型反復解法に対しても，反復マトリックスの固有値分布を改善する前処理は有効である。

2)DR法に前処理を施すことで収束を加速でき，さらに反復パラメータの推定も容易になる。

表-4 前処理付きDR法の収束パラメータ

モデル 4			モデル 5			モデル 6		
λ_{min}	λ_{max}	ITER	λ_{min}	λ_{max}	ITER	λ_{min}	λ_{max}	ITER
0.01	1.5	85	0.01	3.7	137	0.01	1.5	68
0.02	1.5	68	0.03	3.7	79	0.02	1.5	63
0.04	1.5	122	0.04	3.7	68	0.03	1.5	55
0.05	1.0	400	0.05	3.7	63	0.04	1.5	75
0.05	1.5	141	0.06	3.7	75	0.05	1.5	90
0.05	2.5	183	0.05	3.0	56	0.05	2.0	104
0.05	2.0	163	0.05	1.5	40			

5．あとがき

Isoparametric要素を用いた有限要素法による構造解析にDR法を適用した結果，地盤モデルのような大自由度で，比較的振動しにくい境界条件を有する構造系に適用する場合には有効であることが分かった。また不完全コレスキー分解による前処理を施すことによって収束性の改善と反復パラメータの推定をある程度容易にすることができた。しかしながら現時点では，反復パラメータの決定が一般に困難であり，また，前処理付きCG法を上回る結果は得ていない。但し，DR法は計算精度，計算時間の面で優れており，前処理の工夫，反復パラメータの設定法の修正等により，さらにDR法の有効性を向上させることは可能であると思われる。

参考文献

1. 戸川隼人;「マトリクスの数値計算」オーム社
2. R.S.varga著，渋谷政昭訳;「計算機による大型行列の反復解法」サイエンス社
3. R.D.Lynch, S.Kelsey, H.C.Saxe;「THE APPLICATION OF DYNAMIC RELAXATION TO THE FINITE ELEMENT METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS」
4. 曽我，谷口;「マトリックス構造解析におけるPCG法の適用について」．土木学会学第42回年次学術講演会第1部梗概集
5. 吉田，野村，能勢;「有限要素解析への前処理付共役勾配法の適用に関する検討」．構造工学における数値解析法シンポジウム論集第10巻
6. M.A.AJIZ, A.JENNINGS;「A ROBUST INCOMPLETE CHORESKI-CONJUGATE GRADIENT ALGORITHM」，Int. j.numer. methods eng.，Vol.20，949-966，1984
7. 例えば，馬場，成岡;「差分表示を用いる新しい構造解析法-Dynamic Relaxation法の説明-」．土木学会誌1973年8月