

大規模線形構造解析へのプレコンディショナーの利用

岡山大学大学院 学生員 ○藤原 浩二
岡山大学工学部 正会員 谷口 健男

1 まえがき 多くの土木工学分野では、大規模疎行列を係数行列とする連立一次方程式を解く必要がある。今日、解法として直接法が主として使用されているが、演算時間が推定できるという長所を有する反面、容量的、精度的に問題がある。そこで、より大規模系の処理において、容量が少なく、かつ精度保障された解法として間接法が見直されてきている。その背景として、最近計算機がスーパーコンピュータに移行しつつあるということが挙げられる。しかしながら、間接法が有効となるためには、演算時間的に直接法と同程度となる必要がある。文献1において明らかにされているように、このような目的を達成する1つの手法として考えられているものとして、PCG法が挙げられるが、一方それは、板、シェル、等において問題が残されていることも知られている。よってここでは、PCG法を使用し、例題として板曲げをとりあげ、Preconditionerを修正することによる収束性を調べることにする。

2 Preconditioner $Ax=b$ という方程式を直接扱う代わりに、ある正則行列Bを左から掛けて、修正した方程式を $BAx=Bb$ としCG法を適用するのがPCG法である。行列Bの選択は、収束性を向上させるようにする。この行列BをPreconditionerという。具体的には、行列Bを2つの三角行列の積で表し、行列Aの近似逆行列となるような行列Bを探せば良いことになる。ここでは、Preconditionerとして、今日最も良く利用されている不完全コレスキー分解を使用する。

3 数値実験 3.1数値実験モデル 解析モデルとしては、収束性が悪い平板モデルを使用する。なお、平板モデルは、四辺固定とし、一辺の長さは60cm、板厚1cm、荷重 $1\text{kg}/\text{cm}^2$ の等分布荷重、ヤング率 $2.1 \times 10^6 \text{kg}/\text{cm}^2$ 、ポアソン比0.3、1節点自由度は、Z軸方向のたわみ、X軸、Y軸回りの曲げの3自由度である。

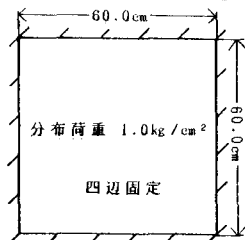


図1 平板モデル

3.2数値実験およびその結果

①解法として、M.A.AjizとA.Jenningsによって、考案された、ROBUST法（以下RICCG法と称す）を使用する（文献2）。この方法は、コレスキー分解不能となることを防ぐパラメータ ψ が導入されている。（式1に示す）ここでパラメータ $\psi=0$ とすれば完全コレスキー分解となる。

$$\text{IF } a_{ij}^2 < \psi^2 a_{ii} \cdot a_{jj} \text{ THEN } \begin{aligned} a_{ii} &= a_{ii} + \sqrt{\frac{a_{ij}^2 \cdot a_{jj}}{a_{ii}}} \\ a_{jj} &= a_{jj} + \sqrt{\frac{a_{ij}^2 \cdot a_{ii}}{a_{jj}}} \end{aligned} \quad (\text{式1})$$

RICCG法を使用し、平板解析を行った。パラメータ ψ の変化による反復回数、及びコレスキー分解に要した要素の割合の変化を、図2に示す。図2よりパラメータ ψ を大きくするとコレスキー分解に使用する要素数は減少し、反復回数は増加する。また、効果あるパラメータ ψ の範囲は、0.4ぐらいまでと判断できる。

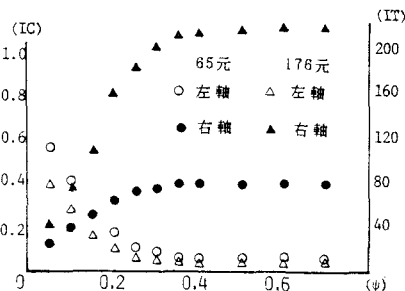


図2 ψとIT, ICの関係

IT: 反復回数

IC: コレスキー分解に要した要素の割合

②解法としてMIC法を使用する。この方法はGustafssonが提案したもので、コレスキー分解において強制的に0にする場所の添字 (i, j) の集合を $\{(i, j) | |i-j| = 0.1m\}$ (m はバンド幅)として分解する（文献3）。まず m を平板モデル（65元）の剛性マトリックスのバンド幅とすると反復回数は74回となり、つぎに m をマトリックスの各列の一番外側

の要素の列番号としても、反復回数は74回となり、結果として収束性は向上しなかった。

③解法としてRICCG法を使用し、その前処理としてこれもPreconditionerの1つである対角スケーリングを行った。反復回数とコレスキー分解に要した要素の割合を図3に示す。結果として、収束性は少し向上した。

④解法として、RICCG法を使用し、パラメータ ψ を面外変位であるたわみと、面外変位である曲げの項で、違う値 ψ_w, ψ_θ を使用した。実験ではまず、 $\psi_w > \psi_\theta$ として行い(表1)、次に $\psi_\theta > \psi_w$ として行った(表2)。結果として、反復回数とコレスキー分解に使用した要素との関係は、 $\psi_w > \psi_\theta$ の場合は、 ψ_θ が大きくなれば $\psi_w = \psi_\theta$ に近くなり有効ではない。 $\psi_\theta > \psi_w$ の場合は、ほぼ $\psi_w = \psi_\theta$ の関係に等しい。つまり $\psi_w = \psi_\theta$ のときが、一番収束性が良いと言える。

3.3 考察 上記数値実験の結果以下のようなことが言よう。

①RICCG法は有効なPCG法であり、パラメータ ψ を、ユーザー側で、必要な収束性、及び使用可能なコンピューターの容量によって選択できる。しかしパラメータ ψ の値によっては、分解不能となることもある。

②MIC法は差分法では有効と言われる。しかしながら、ここで明らかになったように有限要素法を用いた平板解析で有効でなかったのは、差分法に比べ有限要素法は非零要素が多く、MIC法ではコレスキー分解する要素数が、各列で(対角項+2)個という少なさが原因と考えられる。

③前処理として、対角スケーリングを行ったRICCG法は、収束性は少し向上した。しかし、十分な向上には至らなかった。

④RICCG法で、パラメータ ψ を ψ_θ, ψ_w に分離した場合は、収束性の向上には至らなかった。これは、平板の剛性マトリックスを作成する段階でたわみと曲げの連成項が生じることが要因であると考えられる。

4あとかき Preconditionerの修正を講じたが、PCG法で平板解析の収束性が向上しなかったのは、剛性マトリックスを作成する過程で、たわみと曲げの連成項が入る事が大きな要因と考えられる。Preconditionerとして、不完全コレスキー分解を改良するのは、より良い近似逆行列を求めるという点で得策であると言える。不完全コレスキー分解は、要素数を多く分解すればするほど収束性は向上する。しかしあまり多く分解すると計算機の容量を必要とするので、その点を考慮してPreconditionerの修正を行う必要がある。本研究では、Preconditionerを反復法の1つであるCG法に対して適用したが、Preconditionerは、本来対象とする行列の固有値を整える役割を負うものであることより、他の反復法に対しても、有効であることが予想される。このような検討を今後行う必要があろう。なお、本研究は、科学研究番号 62550339の補助を得て行ったものである。

〈参考文献〉1) 名取 亮他、"スーパーコンピュータと大型数値計算" ; 共立出版(1987)

2) M.A.Ajiz, A.Jennings, "A Robust Incomplete Choleski Conjugate Algorithm" ; International Journal for Numerical Methods in Engineering(1983)

3) 野寺 隆、大型疎行列に対するPCG法 "Seminar on Mathematical Sciences" NO.7 慶応義塾大学(1983)

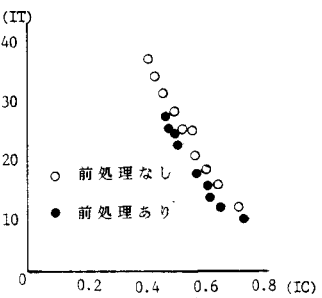


図3 ICとITの関係

表1 ITと ψ_w, ψ_θ の関係

ψ_w	(1)	IT	(2)	IT	(3)	IT
0.01	0.735	11	0.808	9	0.918	6
0.02	0.657	15	0.738	11	0.883	9
0.03	0.620	18	0.690	14	0.858	10
0.04	0.592	20	0.734	15		
0.05	0.569	24			0.860	13
0.06	0.540	25				
0.07	0.505	28	0.657	21		
0.08	0.473	31	0.597	22		
0.09	0.440	34	0.580	24		

(1): $\psi_\theta = \psi_w$ のときのIC

(2): $\psi_\theta = \frac{1}{2}\psi_w$ のときのIC

(3): $\psi_\theta = \frac{1}{10}\psi_w$ のときのIC

表2 ITと ψ_w, ψ_θ の関係

ψ_θ	(4)	IT	(5)	IT	(6)	IT
0.01	0.735	11	0.744	11	0.758	11
0.02	0.657	15	0.660	16	0.674	16
0.03	0.620	18	0.630	18	0.645	18
0.04	0.592	20	0.598	19	0.616	19
0.05	0.569	24	0.563	23	0.589	23
0.06	0.540	25	0.530	26	0.549	27
0.07	0.505	28	0.514	28	0.530	28
0.08	0.473	31	0.479	32	0.505	30
0.09	0.440	34	0.448	34	0.469	34

(4): $\psi_w = \psi_\theta$ のときのIC

(5): $\psi_w = \frac{1}{2}\psi_\theta$ のときのIC

(6): $\psi_w = \frac{1}{10}\psi_\theta$ のときのIC