

はり構造物の材料非線形解析法に関する考察

愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二
 フジタ工業㈱ 正会員 藤 脇 敏 夫
 愛媛大学大学院 学生員 ○牧 野 耕 司

1. まえがき

著者らは、これまでに、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを逐次二次近似法を用いて最小化することにより、材料の非線形性を考慮したはり構造物の解析がきわめて能率的に行えることを明らかにしているが^{1), 2)}、ここでは、材料の非線形性を考慮したはり断面に関する曲げモーメント M と最外縁ひずみ ε_e の関係を導入し、これを用いて各はり要素の仮想曲げ剛性を算定し、変位法の手法により解析する方法との比較検討を行った結果について発表するものである。

2. エネルギー法による解析方法^{1), 2)}

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、材料の非線形性を考慮したはり構造物の解析は、各支点に作用する不静定曲げモーメント M_i を未知変数とし、各支点における曲げモーメントの釣合条件のもとで、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を最小化することにより行うことができる。

文献1)および2)では、この原理に基づき、連続ばりを各支点ごとに切断し、静定基本系として単純ばりを仮定し、はりの各支点に作用する不静定曲げモーメント M_i を未知変数として、はりの全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を M_i の関数として表現することにより、次のような無制約最小化問題を導入する。

$$\text{find } M_i, \quad \text{such that, minimize } \Pi_c(M_i) = \sum_{i=1}^m \Pi_{ci}(M_{i-1}, M_{i+1}) \quad \dots (1)$$

ここに、 m ：静定基本ばりの数、 $\Pi_{ci}(M_{i-1}, M_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi_c(M_{i-1}, M_{i+1}) dx_i$ ： i 番目の静定基本ばりの全コンプリメンタリーエネルギー、 $\pi_c(M_{i-1}, M_{i+1})$ ： i 番目の静定基本ばりの任意点のはり断面のコンプリメンタリーエネルギー、 $M_i = [M_{i1}, \dots, M_{in}]^T$

式(1)の無制約なエネルギー最小化問題を逐次、二次形式に近似し、はりの全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより、真の不静定曲げモーメントを決定することができる。なお、解析にあたっては、はり断面の曲げモーメント M とコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係を導入し、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーおよびその不静定曲げモーメントに対する偏微係数の計算を能率的に行っている。

3. 変位法による解析方法

線形材料からなるはり断面の曲げ剛性 EI は、作用曲げモーメント M の大きさに関係なく常に一定となる。しかし、図-1に示すような非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料からなるはり断面においては、断面に作用する M の大きさによって EI が変化し一定とはならない。そこで、本研究では、あらかじめ M と最外縁ひずみ ε_e との関係を作成し、この関係を用いて次式により各断面に作用する M に対応する仮想曲げ剛性 EI を決定した。

$$EI = \frac{M Y_e}{\varepsilon_e} \quad \dots (2)$$

ここに、 Y_e ：中立軸より最外縁までの距離

解析方法は、まず、はり構造物を要素長 Δl を有する微小要素に分割して各要素の仮想曲げ剛性 EI を仮定し、この EI を用いて従来の変位法の計算手法により各要素端に作用する M を算定する。次に、各要素に作用する平均曲げモーメントを用いて M - ε_e 関係より ε_e を求め、式(2)により EI を修正し、再び変位法により M を求める。このような変位法による解析および仮想曲げ剛性 EI の修正を、 EI および M が一定値に収束するまで繰り返すことにより、はり構造物の真の曲げモーメント分布を決定するものである。

なお、この解析法においては、はりの微小要素内の仮想曲げ剛性 EI を一定として解析しているので、はりの微小要素長 Δl を小さくするほどより精度の高い解が得られる。しかし、はり要素長を小さくすれば、それ

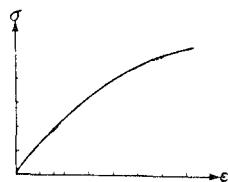


図-1 非線形応力度-ひずみ関係

だけ変位法における力の釣合方程式を解くために多くの計算時間および計算容量を必要とする。そこで、本研究では、種々の Δl について解析を行い、 Δl が解の精度および計算時間に及ぼす影響を検討し、本研究の例題程度の規模の連続ばりでは、 $\Delta l = 2\text{cm} \sim 5\text{cm}$ 、すなわち支間長との比で $1/350 \sim 1/100$ 程度が適当であることを確認した。また、力の釣合方程式を解く際には、対称バンド行列の特性を利用したガウスの消去法を用いている。

4. 数値解析例および考察

上記のエネルギー法および変位法により、図-2に示す3種類の非線形材料 A, B, C よりなる種々の二～四径間の連続ばりについて解析を行い、その結果を比較検討した。例として図-3に示す二および四径間変断面連続ばりの計算結果の比較を表-1に示す。これらの計算結果より、いずれの解法においても、材種の相違による解の精度、最終解を決定するために必要とする反復計算回数(ITE.)および計算時間(CPU.)にほとんど差が見られず、いかなる種類の非線形材料にたいしても全く同様に効率的に適用できることが明らかとなった。また、両解析法による解の相対誤差は最大0.066%で、ほぼ完全に一致した解が得られている。一方、計算効率についてみると、エネルギー法では不静定力の数(N)が1→4と増加するに従い、最終解を得るために必要とする反復計算回数(ITE.)が4→13回と多少増加するのに対し、変位法ではNの大きさにほとんど影響されず、6～11回の反復改良で最終解を得ている。ただし、各計算モデルにおける両解析法の計算時間(CPU.)の比は2/5～4/5となっており、エネルギー法がより短時間で解を得ている。

以上の検討結果より、本研究で述べた変位法も極めて有効な解法であるが、エネルギー法に基づく解析法により、精度の高い解がより効率的に求められることが明らかとなった。

表-1 エネルギー法および変位法の解析結果の比較

材 種		材 料 A			材 料 B			材 料 C		
解析方法		ENERGY法	変位法	誤差 ⁶⁾	ENERGY法	変位法	誤差 ⁶⁾	ENERGY法	変位法	誤差 ⁶⁾
二径間連続断面固定ばり	M ₁₁ ¹⁾	-100.272	-100.280	0.008 %	-101.878	-101.913	0.034 %	-97.586	-97.595	0.009 %
	M ₁₂	-137.011	-137.008	0.002 %	-135.041	-135.046	0.004 %	-143.236	-143.228	0.006 %
	M ₁₃	-149.536	-149.633	0.065 %	-154.232	-154.287	0.036 %	-149.106	-149.122	0.011 %
	ITE ²⁾	12	11		13	10		10	8	
	CPU ³⁾	2.29	5.13	0.569	3.48	4.95	0.703	3.19	4.27	0.747
	σ_{max} ⁴⁾	2359.8 kg/cm ²			2420.4 kg/cm ²			2383.3 kg/cm ²		
	ϵ_{max} ⁵⁾	0.460 %			0.520 %			0.803 %		
四径間連続断面固定ばり	M ₁₁	-116.498	-116.514	0.014 %	-115.740	-115.754	0.012 %	-116.862	-116.865	0.003 %
	M ₁₂	-113.437	-113.463	0.023 %	-115.242	-115.268	0.023 %	-114.460	-114.472	0.010 %
	M ₁₃	-77.173	-77.153	0.026 %	-82.121	-82.067	0.066 %	-79.702	-79.678	0.030 %
	M ₁₄	-187.079	-187.109	0.016 %	-177.583	-177.633	0.028 %	-183.970	-184.008	0.021 %
	ITE ²⁾	13	10		13	10		12	8	
	CPU ³⁾	4.97	7.57	0.657	5.39	7.72	0.698	5.79	6.64	0.872
	σ_{max} ⁴⁾	2155.8 kg/cm ²			2235.0 kg/cm ²			2557.9 kg/cm ²		
	ϵ_{max} ⁵⁾	0.256 %			0.332 %			0.623 %		

1): 不静定曲げモーメント(ton・m) 2): 反復計算回数 3): FACOM M-360AP による計算時間(sec)

4): 最大応力(kg/cm²) 5): 最大ひずみ 6): 相対誤差、ただし計算時間については変位法との比

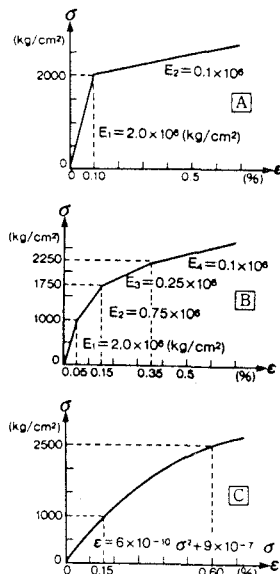


図-2 3種類の非線形応力度-ひずみ関係

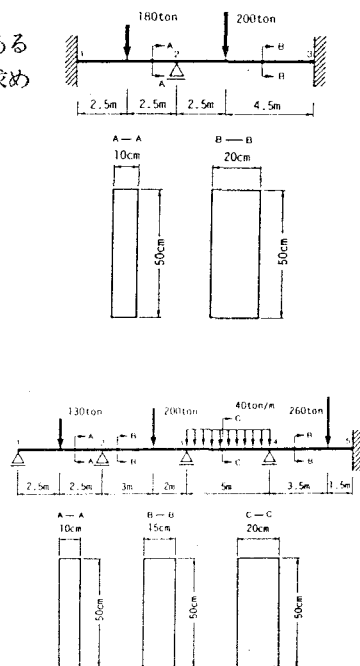


図-3 二、四径間変断面連続ばり

参考文献: 1) 大久保禎二, 藤脇敏夫: "エネルギー原理によるはり構造物の材料非線形解析法に関する考察"

土木学会第42回年次学術講演会概要集, pp.88-89, 1987.9. 2) 大久保禎二, 藤脇敏夫: "コンプ

リメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法", 土木学会論文集(投稿中)