

剛な円形ディスクによる音響波の散乱

岡山大学工学部 正員 廣瀬壮一

1. まえがき

本研究は、剛な円形ディスクによる音響波の散乱問題をいわゆる境界要素法により解析したものである。定式化は、直接、時間領域においてなされており、各時間ごとに方程式を解いて過渡的応答を求める時間ステップ法が用いられている。音響波の散乱問題は、土木の分野では馴染みの少ないものであるかも知れないが、本研究で用いた積分方程式は、弾性クラックによる波動散乱問題の解析に用いられる積分方程式と非常に類似しており、その意味で、本研究は、弾性クラックの解析の予備的解析とも考えられる。

2. 定式化

3次元空間 D 内にある剛な薄いディスク S を考える。このとき、空間 D における音響波の速度ポテンシャル $\psi(\mathbf{x}, t)$ は、次式を満足する。

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in } D \times (0, \infty). \quad (1)$$

ここに、 c は波の位相速度、 t は時間である。式(1)の解 ψ は次の初期条件

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi^{\text{in}}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{in } D, \quad (2)$$

および、ディスク上の境界条件

$$\frac{\partial \psi^{\pm}(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S \times (0, \infty) \quad (3)$$

を満たさなければならない。ここに、 ψ^{in} は入射音響波の速度ポテンシャルであり、 $\mathbf{n}$ は、 S 上の法線ベクトルである。また、入射波がディスクに当たって生じる散乱波 ψ^{sc} は、次の放射条件を満足しなければならない。

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left[\frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \psi^{\text{sc}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^{\text{sc}} \right] = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \psi^{\text{sc}} = 0. \quad (4)$$

さて、以上の条件を考慮すると、式(1)の解 ψ は次の積分の形で表現される。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t \frac{\partial}{\partial n_y} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) [\psi(\mathbf{y}, \tau)] d\tau dS_y, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (5)$$

ただし、未知数 $[\psi]$ は次式で定義されるディスク上のポテンシャルの差である。

$$[\psi(\mathbf{y}, \tau)] = \psi^+(\mathbf{y}, \tau) - \psi^-(\mathbf{y}, \tau).$$

また、 $U(\mathbf{x}, t)$ は、次式で与えられる基本解である。

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|/c). \quad (6)$$

さて、境界条件(3)より、次式が得られる。

$$-\frac{\partial \psi^{\text{in}}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial n_x} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_S \int_0^t \frac{\partial}{\partial n_y} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) [\psi(\mathbf{y}, \tau)] d\tau dS_y, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \quad (7)$$

あるいは、式(6)を(7)に代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi^{\text{in}}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial n_x} &= \frac{1}{4\pi} p.f. \int_S \left\{ \frac{1}{r^3} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y - 3 \frac{\partial r}{\partial n_x} \frac{\partial r}{\partial n_y}) [\psi(\mathbf{y}, t - r/c)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{cr^2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y - 3 \frac{\partial r}{\partial n_x} \frac{\partial r}{\partial n_y}) [\dot{\psi}(\mathbf{y}, t - r/c)] - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial r}{\partial n_x} \frac{\partial r}{\partial n_y} [\ddot{\psi}(\mathbf{y}, t - r/c)] \right\} dS_y. \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $p.f.$ は積分の有限部分を表し、 $r = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$ である。さらに、ディスク S が平らで $x_3 = 0$ 面内にある場合には式(8)はより簡単になって、次のようになる。

$$-\frac{\partial \psi^{\text{in}}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial x_3} = \frac{1}{4\pi} p \cdot f \cdot \int_S \left\{ \frac{1}{r^3} [\psi(\mathbf{y}, t-r/c)] + \frac{1}{cr^2} [\dot{\psi}(\mathbf{y}, t-r/c)] \right\} dS_{\mathbf{y}} \quad (9)$$

3. 数値計算法および結果

Fig.1に示すように、 $x_3=0$ 面内にあるディスクに垂直に入射する音響波の散乱を考える。入射波の速度ポテンシャルは時間的には線形な平面波とする。数値計算では、未知数の $[\psi(\mathbf{y}, t)]$ を時間に関しては線形な内挿関数で表し、空間に関しては静的な解 $\phi^q(\mathbf{y}) = 4A[1-(|\mathbf{y}|/a)^2]^{1/2}/\pi$ で近似した。このとき、式(9)は次のように離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_q \Psi_q^q p \cdot f \cdot \int_{S_{N,m}} \frac{1}{r^3} \phi^q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial \psi^{\text{in}}}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0, N\Delta t) \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_q \sum_{m=1}^{N-1} \Psi_m^q \left\{ [N-(m-1)] \int_{S_{N,m}} \frac{1}{r^3} \phi^q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + [(m+1)-N] \int_{S_{N,m+1}} \frac{1}{r^3} \phi^q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $S_{N,m}$ は第 q 番目の要素のうち、 $(m-1)\Delta t \leq N\Delta t - r/c < m\Delta t$ なる関係を満足する部分である。式(10)は、 Ψ_m^q ($m=1, 2, \dots$) に対する回帰式となっており、各時間ステップ毎に解くことができる。Fig.2は、ディスク上の要素分割を表している。ただし、一つのセグメントについてだけ詳しく示した。また、時間の刻み幅 Δt は $c\Delta t/a = 0.09$ とした。

Fig.3は、ディスク上のいくつかの点におけるポテンシャルの差 $[\psi]$ を時間 ct/a に対してプロットしたものである。 $\times$ 印は周波数領域でのBEMによる結果をFFTにより逆フーリエ変換することにより求められた結果である。両者はよく一致していることがわかる。Fig.4は、時間 $ct/a=9$ におけるディスク上のポテンシャルの差を静的問題の解析解と比較して表したものである。両者はほぼ一致しており、 $ct/a=9$ においては過渡的応答は既に収束していることがわかる。

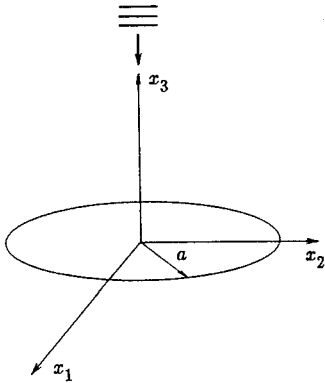


Fig.1 垂直入射波を受ける円形ディスク

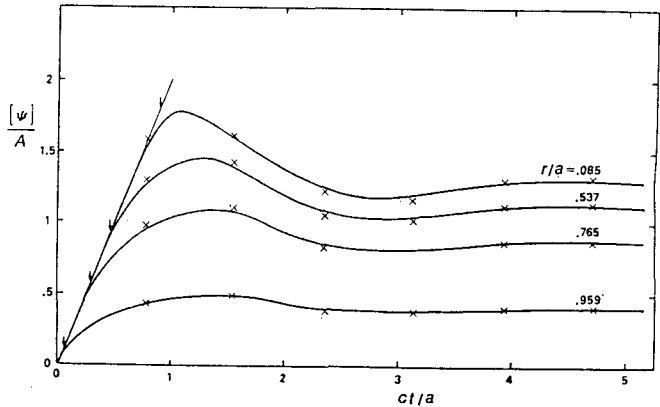


Fig.3 ディスク上のポテンシャルの差 $[\psi]$ の時間的变化

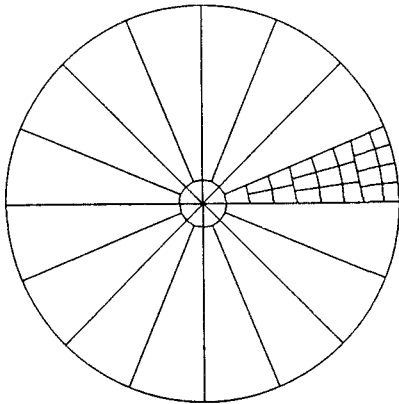


Fig.2 ディスク上の要素分割

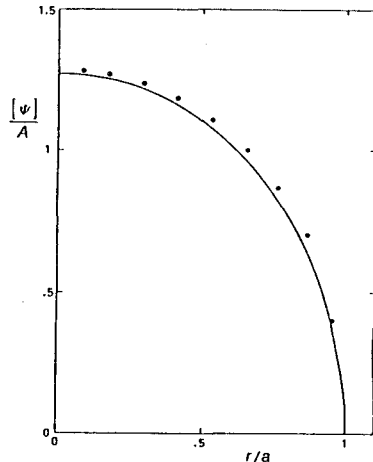


Fig.4 時刻 $ct/a=9$ における本手法による解 ($\cdot$ 印) と静的解析解 (実線) の比較