

伝達マトリックス法による構造物の動的な不規則応答解析

鳥取大学工学部 正会員 高岡 宣善 鳥取大学大学院 学生員 〇奥山 善之
 鳥取大学工学部 正会員 白木 渡 大阪府庁 正会員 酒井 良和
 鳥取大学工学部 正会員 松保 重之

1. まえがき

土木構造物の従来の解析手法の一つとして伝達マトリックス法がある。この手法は静的な構造解析に利用されてきたが、動的なそれにはあまり利用されていない。また、構造物に作用する荷重は不規則に作用するのが一般的であるので、不規則な荷重が作用する場合にも拡張した手法の開発が望まれる。このような観点から本研究では、土木構造物として代表的なはり为例にとり、これが時間の経過とともに不規則に変動する外力が作用する場合の応答解析法の提案を行う。そして、鉛直方向の地震力が作用する場合の数値計算を行うことによって本解析法の有効性を示す。

2. はりの運動方程式

振動系の運動エネルギー T 、位置エネルギー U が分かっている時、Lagrangeの運動方程式は式(1)で与えられる。ここに D は粘性減衰系の逸散エネルギーであり、 $q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = F_k$ (1)

は一般座標、 F_k は一般力である。ただし、上付きドット(・) $\frac{d}{dt}$ $k=(1, 2, 3, \dots, n)$
 は時間 t についての微分を表わす。モーダルアナリシスの手 $y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \cdot q_k(t)$ (2)

法を用いると、はりの動的たわみ $y(x, t)$ は式(2)のように表

わされる。式中の $q_k(t)$ は時間関数と呼ばれ、時間 t のみの $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{F_k}{M_k}$ (3)
 関数であり、 $\phi_k(x)$ は空間座標 x のみの関数で固有関数と呼ばれ、一般に直交性を有する。この時、はりの運動方程式は、
 式(2)を式(1)に代入することにより式(3)のように変形できる。これは、時間関数の支配方程式である。

3. 伝達マトリックス法による固有関数の評価

空間領域におけるたわみ、すなわち固有関数を求める。 $V^R = TV^L$ (4)

ただし固有関数は、確定関数であることに注意すべきで

ある。曲げ剛さ EI が一樣なはりの振動の基礎微分方程式

を解くことにより式(4)のようなはりの両端の物理量を

結ぶ関係式が得られる。ここに V^L 、 V^R はそれぞれ、は

りの左右端のたわみ ϕ 、たわみ角 θ 、曲げモーメント M 、

せん断力 Q を状態空間表示したベクトルである。また、

T は格間伝達マトリックス²⁾と呼ばれるものである。単

純はりの場合には、 C 、 C' なる抽出マトリックスを導入

することにより、式(5)のような方程式が得られ、こ

れらを用いて固有関数を求めると、式(6)のようになる。

$$V^R = TV^L \quad (4)$$

$$\text{ここに } V^R = [\phi(l), \theta(l), M(l), Q(l)]^T$$

$$V^L = [\phi(0), \theta(0), M(0), Q(0)]^T$$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ M \\ N \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} C & -S/\beta & \alpha C'/\beta^2 & \alpha S'/\beta^3 \\ -\beta S' & C & -\alpha S/\beta & -\alpha C'/\beta^2 \\ \beta^2 C'/\alpha & -\beta S'/\alpha & C & S/\beta \\ \beta^2 S/\alpha & -\beta^2 C'/\alpha & \beta S' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ M \\ N \end{bmatrix}^L$$

$$C = \frac{1}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x) \quad C' = \frac{1}{2} (\cosh \beta x - \cos \beta x) \quad \alpha = \frac{1}{EI}$$

$$S = \frac{1}{2} (\sinh \beta x + \sin \beta x) \quad S' = \frac{1}{2} (\sinh \beta x - \sin \beta x) \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$$

$$V^R = C' T C V^L \quad (5)$$

$$\phi(x) = k \sin \beta x \quad (6)$$

4. 時間関数の不規則応答解析

時間関数の不規則応答解析を行う。はりに作用する外

力は非定常白色雑音過程でモデル化できるものとする。

式(3)を変形して行列表示すると、式(7)のように表わ

せる。そして、式(7)を $Y_k(t)$ について解くと式(8)のよ

うになる。ここに、式(9)を指数伝達マトリックスと呼

$$\frac{dY_k(t)}{dt} = AY_k(t) + F_k \quad (7)$$

$$\text{ここに } Y_k(t) = \begin{bmatrix} q_k \\ \dot{q}_k \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & 0 \end{bmatrix} \quad F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ F_k/M_k \end{bmatrix}$$

ぶ。式(8)を共分散 $R(t)$ の定義式に代入すると、式(10)

のように状態ベクトル $Y(t)$ の共分散方程式を得る³⁾。

ただし、簡単のために添字は省略し、 $t=0$ の時に下付き添字0を付した。式(10)を数値計算に適した微分方程式で表現すると式(11)のようになる。

$$\dot{Y}(t) = e^{At} Y(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F_k(\tau) d\tau \quad (8)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_k t) & \sin(\omega_k t)/\omega_k \\ -\omega_k \sin(\omega_k t) & \cos(\omega_k t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R = e^{At} R_0 e^{At} + e^{At} \int_0^t E[Y F^T] e^{A^T(t-\tau)} d\tau$$

$$+ \int_0^t e^{A(t-\tau)} E[F Y^T] d\tau e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Q(\tau) e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} R = A R + R A^T + Q(t) \quad (11)$$

$$f_k(x, t) = -m A \psi(t) w(t) \quad (12)$$

$$\psi(t) = c_1 c_2 t \exp(-c_1 t), \quad c_1 = 0.54, \quad c_2 = 2.71828 \dots \quad (13)$$

解析の対象としたのは、図-1に示すスパン $l=36$ (m)、

はりの曲げ剛さ $EI=2.10014 \times 10^8$ (N・m²)=一定の一等道路橋

である。また、はりに作用する外力は式(12)でモデル化

できる鉛直方向の地震力とした。式中の m は単位長さ当

りの質量、 A は最大地表加速度、 $w(t)$ はスペクトル密

度 S_0 を有する定常白色雑音過程、 $\psi(t)$ は地表加速度の非定常さを考慮す

るための時刻 t の確定関数(形状関数)であり、本研究では式(13)で表わ

される関数を用いた。さらに鉛直方向の最大地表加速度は $A=80$ galとする。

計算結果として、図-2に第 k 次振動モードの固有関数 $\phi_k(x)$ を、図-3

に時間関数 $q_k(t)$ の標準偏差 $\sigma_{q_k}(t)$ の時間変化を各固有振動モード別に示

す。そして、図-4に $\phi_k(x)$ と $q_k(t)$ とを合成した実際のたわ

み $y(x, t)$ の標準偏差 σ_y の時間変化を示す。ただし、図-3、4

のいずれにおいてもスパン中央($x=l/2$)における標準偏差 σ_{q_k} 、

σ_y を外力のスペクトル密度 S_0 で基準化した値を縦軸に取り、横

軸に時刻 t をとって示している。図-3においては偶数の固有振

動モードに対しては示されていないが、それは偶数モードの場合、

一般力 F_k が0となって $q_k(t)$ が消失してしまうからである。図-3

を見ると、第1,3,5次振動モードのピークはどれも $t=2.5$ 秒であり、

その時の σ_{q_k} はそれぞれ、5.4010, 0.2004, 0.0429(cm)であることが

分かる。そして第3次モードのピーク値は第1次のその3%、

第5次モードでは0.8%でしかないので、第1次モード以外はあま

り影響していないことが分かる(図-4参照)。最後に、本解析法

はここで示した構造物以外の一般の構造物、

例えばラーメン構造物あるいは多自由度質点

系などの動的不規則応答解析にも適用すること

ができることを指摘しておく。

参考文献

- 1) 中井 博 : 土木構造物の振動解析, 森北出版, 1983-4.
- 2) 盛岡 昌夫, 遠田 良喜 : 伝達マトリックス法, 培風館, 1970-10.
- 3) 岡林 隆敏 : 不規則な分布荷重を受けるはりの振動解析, 土木学会論文報告集, 第316号, 1981-12.

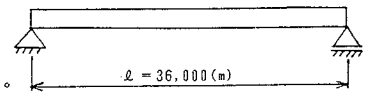


図-1 単純ばり

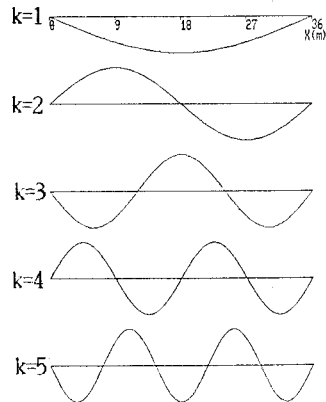


図-2 固有振動モード $\phi_k(x)$

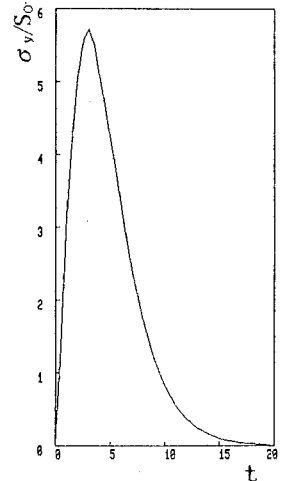
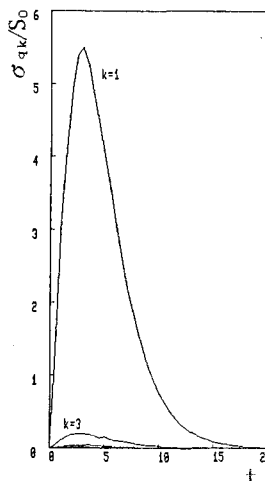


図-3 標準偏差 $\sigma_{q_k}(t)$ の時間変化 図-4 合成結果 σ_y の時間変化