

曲線近似におけるカルマンフィルターの適用について

(株)大本組 正員 ○単元利博

(株)大本組 正員 森 嘉仁

1. はじめに

土質およびコンクリートの試験や現場計測に関するデータを整理する場合、それらの回帰曲線が、指数関数系の回帰式でうまく近似できるケースが、比較的多く認められる。このような曲線回帰は、未定係数が非線形の形で組み込まれているために、非線形最小二乗法を用いて処理される¹⁾が、本報分では、制御工学等の分野で用いられているカルマンフィルター理論を非線形領域に適用可能とした拡張カルマンフィルターのアルゴリズムの反復使用により曲線近似を行なった例と、同手法を条件付き曲線近似に使用した例について報告する。

2. カルマンフィルター

カルマンフィルターの詳細については参考文献 2), 3) を参照されたいが、要約すれば、

- ①信号を生成するシステムの動特性(状態方程式)
- ②雑音の統計的性質(白色性およびガウス性)
- ③初期値に関する先験情報および時々刻々と与えられる観測データ(観測方程式)

を用いて、システムの状態量の最小二乗推定値を逐次的に与えるデータ処理アルゴリズムである、といえる。システムが非線形の場合の状態推定に用いられる拡張カルマンフィルターのアルゴリズムを表-1に示す。

3. カルマンフィルターによる曲線近似例

表-2 指数関数系回帰式の計算結果

	断熱温度上昇曲線				材令-引張強度曲線			
	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
	初期値	最確値	初期値	最確値	初期値	最確値	初期値	最確値
K	20.0	39.96	20.0	37.23	10	27.58	10	26.60
α	0.5	0.8405	0.5	0.4240	0.5	0.0432	0.5	0.0843
β	1.0	1.448	1.0	1.550	1.0	1.966	1.0	1.395
誤差の共分散	0.1	0.1	0.1	0.1	5.0	5.0	2.0	2.0
誤差の二乗和		3.72		2.82		14.5		5.11

表-1 拡張カルマンフィルターアルゴリズム

①および②式で表わされる非線形システムの状態推定は③式の初期条件を用いて④以下のアルゴリズムによってなされる。

$$\text{非線形状態方程式} \quad x_{t+1} = f_t(x_t) + w_t \quad \text{①}$$

$$\text{非線形観測方程式} \quad y_t = h_t(x_t) + v_t \quad \text{②}$$

ここに、 x_t は n 次元状態ベクトル、 y_t は m 次元観測ベクトル、 w_t 、 v_t は平均値が 0、共分散行列が Q_t 、 R_t で表わされるガウス確率ベクトル(雑音)である。

$$\text{初期条件} \quad \text{状態量の初期値: } \bar{x}_{0,1} = x_0$$

$$\text{状態量の初期値の誤差の共分散行列: } P_{0,1} = \Sigma \quad \text{③}$$

$$\text{観測行列} \quad H_t = (\partial h_t / \partial x_t)_{x=\bar{x}_{t,1}} \quad \text{④}$$

$$\text{カルマンゲイン} \quad K_t = P_{t,1} H_t^T [H_t P_{t,1} H_t^T + R_t]^{-1} \quad \text{⑤}$$

$$\text{フィルタ方程式} \quad \bar{x}_{t,1} = \bar{x}_{t,1-1} + K_t [y_t - h_t(\bar{x}_{t,1-1})] \quad \text{⑥}$$

$$\text{遷移行列} \quad F_t = (\partial f_t / \partial x_t)_{x=\bar{x}_{t,1}} \quad \text{⑦}$$

$$\text{カルマンフィルタ} \quad \bar{x}_{t+1,1} = f_t(\bar{x}_{t,1}) \quad \text{⑧}$$

$$\text{共分散方程式} \quad P_{t+1,1} = P_{t,1} - K_t H_t P_{t,1} \quad \text{⑨}$$

$$P_{t+1,1} = F_t P_{t,1} F_t^T + Q_t \quad \text{⑩}$$

ここに、添字 $t|t-1$ は $(t-1)$ ステップにおける状態により、 t ステップの状態を推定することを意味している。

本アルゴリズムの反復使用により、観測データを順次取り込み漸次的に最適推定値を求めることができる。

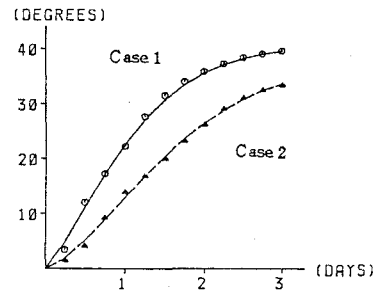


図-1 断熱温度上昇曲線

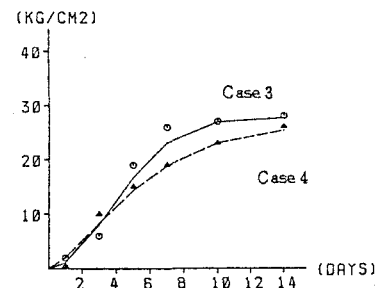


図-2 材令-引張強度曲線

(例1) 指数関数系の回帰式の近似曲線

指数関数系の回帰式の例として、(1) 式のワイブル分布曲線を取りあげる。

表-1における状態量ベクトルは、本例では、 $x_t = \{K, \alpha, \beta\}^T$ となる。また、これらは t の値に関わらず一定値であるので、表-1中の⑦式で示される遷移行列は単位行列となる。また、④式で示される観測行列は、(2) 式となる。

状態量に含まれる雑音の共分散を0、状態量の初期値の誤差の共分散行列を単位行列として、観測量に含まれる誤差の共分散と状態量の初期値を適当に仮定して計算した例を、図-1、2に示す。

また、表-2は計算結果である。

(例2) 境界条件付の曲線近似

最も簡単な例として、単純ばりに等分布荷重が作用する場合のたわみを入力データとして、たわみの近似曲線を推定する場合を考える。たわみのデータは正解値の小数点第3位以下を切り捨てた高々有効数字2桁の、誤差を含んだデータである。(表-3 参照)

等分布荷重満載時の単純ばりのたわみ曲線の係数は、各々物理的な意味を有しており、左側支点におけるたわみを y_0 、たわみ角を θ_0 、曲げモーメントを M_0 、せん断力を Q_0 とし、また荷重強度を P とすれば、左側支点より距離 x の位置のたわみ y は(3)式で示される。

一方本例の場合両支点において、たわみと曲げモーメントがともに0であるという条件を考慮しなければならない。カルマンフィルタの場合、この境界条件は観測条件式として容易に取り込むことができる。この場合の観測方程式(この場合は線形)を(4)式に示す。

ここに、 x_i 、 y_i は i 番目のデータの座標とたわみの値であり、 x_0 は左側支点の座標値、 x_n は右側支点の座標値である。境界条件を考慮しない場合は、(3)式を直接最小二乗法処理すればよい。

これら2ケースの計算結果を表-4に示す。表-4より、条件付カルマンフィルタによる推定は条件を考慮しない最小二乗法推定に比べて誤差の値は大きいものの、系の物理量(支点反力、作用荷重etc.)を比較的良好に推定できることが予想される。

4. おわりに

カルマンフィルタによる曲線近似においては、曲線の未定係数が非線形の場合でも 観測方程式を未定係数で偏微分した観測行列が与えられれば、一定のアルゴリズムに従って最適解に到達可能である。また、境界条件の導入も(例2)にみられるように容易であり、これらの点はカルマンフィルタを用いる大きな利点といえる。(例2)の場合、境界条件を考慮することにより雑音を含んだデータ中に隠されている系の信号の値(システムの状態量としての荷重)の推定が可能であり、今後このような逆解析による同定問題へのカルマンフィルタの適用を図ってゆきたいと思う。

(参考文献)

- 1) 宇都・冬木・桜井：指数関数系の回帰式のまとめ，第21回土質工学研究発表会，1986
- 2) 有本卓：カルマンフィルタ，産業図書，1977
- 3) 片山徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983

表-3 入力データ

座標値	たわみ	
	正解値	入力値
0.1(0.9)	0.0981	0.09
0.2(0.8)	0.1856	0.18
0.3(0.7)	0.2541	0.25
0.4(0.6)	0.2976	0.29
0.5	0.3125	0.31

表-4 計算結果比較表

	期待値	線形最小二乗法推定値	条件付カルマンフィルタ推定値
y_0	0.000	-0.0150	-4.598×10^{-4}
θ_0	-1.000	-1.0987	-0.9794
M_0	0.000	0.0285	-1.657×10^{-7}
Q_0	0.500	0.3785	0.4898
P	1.000	0.7571	0.9794
誤差の二乗和		2.12×10^{-5}	9.31×10^{-5}

表-5 例題で用いる計算式

$$y = K(1 - e^{-\alpha t} \beta) \quad (1)$$

$$H_t = [1 - e^{-\alpha t} \beta, K t \beta e^{-\alpha t} \beta, K \alpha t \beta e^{-\alpha t} \beta \ln t] \quad (2)$$

$$y = y_0 - \theta_0 x - 12 M_0 x^2 - 4 Q_0 x^3 + P x^4 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -12x_i^2 & -4x_i^3 & x_i^4 \\ 1 & -x_0 & -12x_0^2 & -4x_0^3 & x_0^4 \\ 0 & 0 & -24 & -24x_0 & 12x_0^2 \\ 0 & 1 & -x_0 & -12x_0^2 & -4x_0^3 \\ 0 & 0 & -24 & -24x_0 & 12x_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ P \end{bmatrix} + \{v_i\} \quad (4)$$