嗜好変化の比較静学に関する二三の考察

鳥取大学工学部　正　員○小林潔司
京都大学大学院　学生員　張　衛彬

1.はじめに　P.Samuelson(1947)の先駆的な研究以来、比較静学に関する理論的・応用的研究は数多く蓄積されてきた。比較静学は一つの均衡状態から別の状態へのシステムの変化を、その調整的過程を問題とせずに研究する方法である。Samuelson流の比較静学の枠組の中では、システムのパラメータ変化はそれぞれ外生的に与えられる。比較静学の前提として、個人の嗜好あるいは効用関数はシステムの外生条件の変化に対して不変であるという仮定を設ける。しかし、社会・経済システムの問題はまさに人間を扱った問題であり、外生条件の変化に対する嗜好の不変性という前提が成立する保証はない。従来、嗜好変化のモデル化の重要性については、数多くの研究者によって指摘されてきたものの、比較静学に関する研究において嗜好変化は極めて限定された形で取り扱われてきたのが現状である。Satoは「r-パラメータ無限小変換の存在」という弱い仮定の下での比較静学の方法を提案した。Satoの研究はLie変換を用いた嗜好変化の比較静学の一般的な枠組を与えるものであるが、そこでは外生的な嗜好変化を扱うにとどまっている。本研究ではSatoの研究を基礎として、Lie変換を用いた比較静学に関してSatoとは異なった解釈と方法論を提示するとともに、嗜好変化を内生化した比較静学の数学的な枠組について理論的に考察するものである。

2.Lie変換を用いた比較静学の基本的枠組　通常の比較静学の方法を一般的な効用最大化問題(式(1))を例にとり説明する。式(1)のラグランジュ関数を式(2)のように定義する。問題(1)の内点解を仮定すれば、1階の最適条件は式(3)となる。ここで式(3)をパラメータε_s(s=1,--,r)で微分すれば、式(4)となる。ここで、表記の便宜上、式(4)を式(5)のように表す。この時、比較静学の評価式(6)を得る。ここで留意すべきことは、個人の嗜好あるいは技術の構造は外的パラメータε_sの影響を受けないとう前提を設けていることである。以上の比較静学の方法を嗜好変化を許容した場合への拡張を試みる。ここで、最適条件式(3)のそれぞれに含まれる変数X_kがパラメータε_sの変化によって嗜好変化の作用を受け、その有効値(effective value)が$\bar{X}_k$に変化したと考えよう。このとき、嗜好変化を式(7)のようなLie変換として記述できる。さて、問題(1)の最適解が式(7)に示す変換の作用を受け変化したとしよう。変換の前後において$\bar{X}_k$,X_kは最適条件(3)を満足しなければならない。したがって、式(8)が成立しなければならない。ここで、ε_s=0の近傍でLie変換を近似すれば、式(9)を得る。ここで、パラメータε_sによる無限小作用素をLie形式Φ_sを用いて式(10)のように定義する。このとき、嗜好変化を許容した比較静学の基本評価式は式(11)のように示される。

3.嗜好変化を内生化した比較静学　2.で示した比較静学の方法は、嗜好変化をε_sの変化に伴うLie変換として、個人の最適化行動とは独立に外生的に与えている。ここで、パラメータε_sの変化が先ず個々の変数の有効値を変化させ、その結果観察される個人の行動が変化すると考えよう。このような嗜好変化を内生化した比較静学は特に土木計画学の領域において適用可能性は高いと考える。著者等は嗜好変化を内生化した比較静学の方法としてすでに、(1)効用関数のパラメータ、(2)資源制約のパラメータのそれぞれが変化した場合の比較静学の理論的枠組を開発しているが、ここでは、紙面の都合、後者の方法を示すにとどめる。資源パラメータの比較静学の方法は、例えば、余暇時間や所得の変化が個人の交通行動や立地行動にどのような影響を及ぼすのかといった問題に適用でき、その汎用性は高いと考える。ここで、式(12)のような効用最大化問題を考える。ここで、パラメータα_sが$\bar{\alpha}_s=\alpha_s+\varepsilon_s$と変化したと考えよう。ここで、Lie変換を式(13)のように定義する。また、Lie変換を恒等変換の近傍で式(14)のように近似し、式(10)のようにLie作用素を定義すれば、2.の場合と同様に比較静学の評価式(11)を得る。ただし、この場合許容される嗜好変化は式(15)を満足するものに限られる。このことは、効用最大化問題(12)を定式化するということは、同時にその問題が許容する嗜好変化のタイプを暗黙のうちに想定していることを意味している。

4．住宅立地行動分析への適用

ここでは資源制約のパラメータが変化した場合の嗜好変化の比較静学の適用例として住宅立地行動分析をとりあげる。基本モデルとして式(16)に示すような簡単な静学的な住宅立地モデルを考えよう。ここで、従来の研究と同様に費用関数、効用関数は$dC/dX \leq 0, d^2C/dX^2 \geq 0, U_Q \geq 0, U_X \leq 0, U_{QQ} \leq 0, U_{QX} \leq 0, U_{XX} \geq 0$を満足すると仮定する。ここで、比較静学の前後で所得Yが式(17)のように変化したとしよう。このとき所得変化に伴う嗜好変化は式(18)のような無限小変換を用いて記述できる。このとき、無限小変換は式(19)を満足するものでなければならない。すなわち、式(16)のように立地行動を定式化すれば、同時にそれが許容する嗜好変化のパターンを暗黙の内に式(19)のように限定することになる。ここで、式(6)に従って比較静学の基本方程式を具体的に求めれば、式(20)のようになる。さらに、比較静学の評価式を求めれば、式(21)のようになる。ここで、W_{ij}は行列W^{-1}の各要素である。いま、U_{XX}が十分に小さいと仮定して基本モデルの比較静学分析を試みる。所得変化によって生じる嗜好変化のパターーンとしてξ_Q, ξ_Xの符合がそれぞれ(1)正,正(2)負,正(3)正,負(4)負,負となるような4つのケースを考えよう。4つのケースの$dQ/d\varepsilon, dX/d\varepsilon$の符合を評価すれば、それぞれ(1)不定、負、(2)不定、不定(3)不定、不定(4)不定、正となる。ここで不定とはその符合が一意的に定められないことを意味し、その正負は$\Phi_1 h_Q, \Phi_2 h_X$の符合に依存する。一方、通常の方法で嗜好変化が生じない場合の比較静学分析を行えば、$dQ/d\varepsilon, dX/d\varepsilon$の符合はそれぞれ一意的に正、負となる。したがって、嗜好変化を考慮した場合には嗜好変化の方向によっては嗜好変化を考慮しなかった場合と比較して$dQ/d\varepsilon, dX/d\varepsilon$の変化の方向が逆になりうる場合がある。このことより、ある政策手段の比較静学を行う場合、嗜好変化に関する注意深い配慮が必要であることが容易に理解できる。

$$\text{Maximize } Z=U(X,\varepsilon) \text{ subject to } g_j(X,\varepsilon) \leq 0 \quad (j=1,\text{--},m) \qquad \text{--(1)}$$

$$L(X,\lambda,\varepsilon)=U(X,\varepsilon)-\Sigma_j \lambda_j g_j(X,\varepsilon) \qquad \text{--(2)}$$

$$h_i=\partial L/\partial X_i=0,\ H_j=\partial L/\partial \lambda_j=0 \quad (i=1,\text{--},n;j=1,\text{--},m) \qquad \text{--(3)}$$

$$\begin{cases} \Sigma_k h_{ik}\partial X_k/\partial \varepsilon_s+\Sigma_j h_{ij}\partial \lambda_j/\partial \varepsilon_s=-h_{is} \\ \Sigma_k H_{jk}\partial X_k/\partial \varepsilon_s=-H_{js} \quad (i=1,\text{-},n;j=1,\text{--},m) \end{cases} \qquad \text{--(4)}$$

ただし、$h_{ik}=\partial h_i/\partial X_k, h_{ij}=\partial h_i/\partial \lambda_j, H_{jk}=\partial H_j/\partial X_k, h_{is}=\partial h_i/\partial \varepsilon_s, H_{js}=\partial H_j/\partial \varepsilon_s$

$$W\partial M/\partial \varepsilon_s=-\partial N/\partial \varepsilon_s, \qquad \text{--(5)}$$

ただし$\partial M/\partial \varepsilon_s=(\partial X/\partial \varepsilon_s, \partial \lambda/\partial \varepsilon_s)', \partial N/\partial \varepsilon_s=(h_{is},H_{js})'$

$$\partial M/\partial \varepsilon_s=-W^{-1}\partial N/\partial \varepsilon_s \qquad \text{--(6)}$$

$$\overline{X}_k \doteqdot \theta_k(X_1,\text{--},X_n:\varepsilon) \quad \text{ただし、}\overline{X}_k\text{は変換後の変数}X_k\text{の有効値} \qquad \text{--(7)}$$

$$h_i(\overline{X},\overline{\lambda})=h_i(X,\lambda,\varepsilon),\ H_j(\overline{X})=H_j(X,\varepsilon) \qquad \text{--(8)}$$

$$\delta X_k=\Sigma_s \xi_{ks}\delta \varepsilon_s, \text{ただし、}\xi_{ks}=\partial \theta_k/\partial \varepsilon_s \qquad \text{--(9)}$$

$$\Phi_s=\Sigma_k \xi_{ks}\partial/\partial X_k \qquad \text{--(10)}$$

$$\partial M/\partial \varepsilon_s=-W^{-1}\Phi_s(h,H), \text{ただし}\Phi_s(h,H)=(\Phi_s h_1,\text{---},\Phi_s H_m)' \qquad \text{(11)}$$

$$\text{Maximize } U(X) \text{ subject to } g_s(X) \leq \alpha_s \quad (s=1,\text{--},m) \qquad \text{--(12)}$$

$$\overline{X}_k=\theta_k(X:\alpha_s+\varepsilon_s) \qquad \text{--(13)} \qquad \overline{X}_k=X_k+\xi_{ks}\varepsilon_s \qquad \text{--(14)}$$

$$\Sigma_k \partial g_s(X)/\partial X_k \xi_{ks}=1 \qquad \text{--(15)}$$

Maximize $U(Q,X)$ subject to $Y=PQ+C(X)$ ここに、Y:所得;Q:住宅ｻｰﾋﾞｽ;X:CBDからの距離;p:住宅ｻｰﾋﾞｽのﾚﾝﾄ;C:立地点固有の費用である。(16)

$$\overline{Y}=Y+\varepsilon \quad \text{--(17)} \qquad \overline{Q}=Q+\xi_Q\varepsilon,\ \overline{X}=X+\xi_X\varepsilon \quad \text{--(18)} \qquad p\xi_Q+C_X\xi_X=1 \quad \text{(19)}$$

$$\begin{bmatrix} U_{QQ} & U_{QX} & -p \\ U_{QX} & U_{XX}-\lambda C_{XX} & -C_X \\ -p & -C_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial Q/\partial \varepsilon \\ \partial X/\partial \varepsilon \\ \partial \lambda/\partial \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_1 h_Q \\ -\Phi_2 h_X \\ -\Phi_3 H\lambda \end{bmatrix} \qquad \text{--(20)}$$

$$dQ/d\varepsilon=-(W_{11}\Phi_1 h_Q+W_{12}\Phi_2 h_X)$$
$$dX/d\varepsilon=-(W_{21}\Phi_1 h_Q+W_{22}\Phi_2 h_X) \qquad \text{--(21)}$$

5．おわりに

本研究ではLie変換を用いた比較静学の基本的な枠組について述べるとともに、嗜好変化を内生化した比較静学の方法に関して特に資源パラメータが変化した場合を例に取り上げて説明した。その他の場合における比較静学に関しては参考文献に譲ることとする。また、効用関数のパラメータに関する比較静学に関しては講演時に言及することとする。なお、本研究では制約条件式そのものに含まれるパラメータの比較静学に関しては言及していない。制約条件式のパラメータが変化するということは、制約条件式として記述した技術的な構造の変化を意味し、比較静学を行うにはまず制約条件式の形式そのものの完全変換可能性(holotheticity)に関する議論が必要となる。これに関しては別稿において発表することとする。

(参考文献)K.Kobayashi,W.B.Zhang,and K.Yoshikawa:A New Comparative Static Approach to Household's Taste Changes by Lie Group Theory, Infrastructure and Building Sector Studies: No.7, Center for Regional Science, Umea University, Sweden, 1987.3.