# 住宅生産関数の完全変換可能性について

京都大学大学院　学生員○張　衛彬
鳥取大学工学部　正　員　小林潔司

1. はじめに　住宅サービスの生産における建築と土地要素の代替性(capital-land substitution)は、都市における地代勾配を決定する重要な要因の一つであり、都市構造とりわけ都市における住宅の高層化現象を理解するうえで極めて重要な概念である。周知のとおり、Muth(1969)は、住宅生産関数という概念を導入するとともに、合衆国の住宅市場を対象として、住宅生産関数における資本要素と土地要素の間の技術代替性を実証的に明らかにした。その後、住宅生産関数を対象とした実証分析の結果、住宅サービスの生産の成長率のうち資本要素あるいは土地要素の成長によって説明できない部分があることが多くの研究者によって指摘されている。これらの研究ではその理由を技術変化・嗜好変化に求めている。一方、嗜好変化が住宅サービスの生産に及ぼす影響を分析した研究も種々あるが、これらの研究は、生産関数の形式を分析に先立って想定し、嗜好変化が住宅生産関数のアウトプットにもたらすシフトを分析するという方法を採用している。このような方法はa prioriに仮定した生産関数の形式が分析結果を左右するという欠陥を持っている。嗜好変化は生産における投入要素の組合せに影響を及ぼすとともに、アウトプットである住宅サービスそのものにシフトを与える。本研究では、嗜好変化が住宅サービスの生産に及ぼす影響を生産関係による効果と嗜好変化による効果に分離計測できることを住宅生産関数の完全変換可能性として定義する。そして、生産関数が完全変換可能であるための必要十分条件を求めるとともに、住宅生産関数を推計する方法について考察する。

２．住宅生産関数　住宅サービスの産出量Hと投入要素である土地資本L,建築資本Qとの間に成立する生産関数を式(1)のように定義する。fは準凹で連続微分可能な新古典派生産関数である。ここで、用いる生産関数はMuth(1969)が導入し、都市経済学の分野で数多く用いられてきたものと同一である。Muthの意味では住宅生産関数は生産の技術的な関係を示す関数というよりむしろ家計の嗜好の集計関数という意味が強い。ここでは、Muthの定義に従って、生産関数を家計の嗜好の集計関数と考える。住宅生産関数は住宅市場における住宅生産行動を分析するの際に重要な役割を果たす。例として、静学的な新古典派的住宅生産モデルを考えよう。完全競争市場において住宅サービスHを生産する場合の投入要素の最適な組合せは式(2)の費用最小化問題を解くことによって得られる。1階の最適条件は式(3)のようになる。一方、住宅サービスの等量線は式(4)となる。式(3)より、資本-土地限界代替率は式(5)となる。

３．嗜好変化と完全変換可能性　住宅生産関数が嗜好変化の影響を受け、住宅サービス生産の水準がシフトしたと考える。嗜好変化を考慮にいれた一般的な生産関数は式(6)である。ここで、嗜好変化をL,Qといった変数の測定単位の変化であると考え、式(7)に示すようなLie群として定義する。さらに、Lie群を恒等変換の近傍で式(8)のように近似する。ここで、住宅生産関数の完全変換可能性(holotheticity)をつぎのように定義する。『嗜好変化を示す変換群を通じて作用する嗜好変化$T_t$のもとで嗜好変化のすべての効果が式(9)に示すようなある強い単調変換$F_t$で表されるとき、生産関数は所与の$T_t$のもとで完全変換可能であると定義する。』すなわち、fが嗜好変化に対して完全変換可能であれば、嗜好変化後の住宅サービスHは基礎的な生産関係の効果H=f(L,Q)と嗜好変化の効果$F_t[\cdot]$に弱分離される。すなわち、生産関数の族の形式は嗜好変化の影響を受けない。このことは、完全変換可能な住宅生産関数のもとで式(10)が成立することを意味する。すなわち、生産関数の投入要素の技術代替率Rは嗜好変化の影響を受けない。したがって、資本-土地限界代替率dL/dQは嗜好変化の影響を受けない。このことは、嗜好変化の影響を排除して限界代替率を市場データより計測できることを意味する。限界代替率が計測できれば、その背後にある生産関数を容易に導出できることは言うまでもない。したがって、嗜好変化という経済変換の作用のもとで、嗜好変化の影響を捨象して生産関数を計測するためには生産関数がありうべき嗜好変化に対して完全変換可能な場合に限られる。

## 4．完全変換可能な住宅生産関数の構造

住宅生産関数がある嗜好変化のもとで完全変換可能であれば、生産関数は嗜好変化の作用により同じ族の別の曲線にシフトする。このことは、生産関数の族が嗜好変化に対して不変であることを意味する。したがって完全変換可能な生産関数の一般型を求めることは数学的にはLie変換群上での不変式を求める問題に帰着する。ここに、住宅生産関数が嗜好変化に対して完全変換可能であるための必要条件を定理1として与える。

$H=f(L,Q)$，ただし$H$：住宅サービス生産量、$L$：土地資本、$Q$：建築資本　(1)

Min. $rL+nQ$ subject to $\hat{H}=f(L,Q)$，ただし、$r$：地代、$n$：建築価格 (2)

$(\partial f/\partial L)/(\partial f/\partial Q)=r/n$ ---(3)

$dH=M(L,Q)dL+N(L,Q)dQ=0, M(L,Q)=\partial f/\partial L, N(L,Q)=\partial f/\partial Q$ ---(4)

$dL/dQ=-n/r$ ---(5)　$H=f(L,Q,t)$、 $t$：パラメータ ---(6)

Lie変換群, $T_t$：　$\bar{L}=\phi(L,Q,t)$, $\bar{Q}=\psi(L,Q,t)$ ---(7)

$\bar{L}=L+\xi\,\delta t$, $\bar{Q}=Q+\eta\,\delta t$　ただし、$\xi=\partial\phi/\partial t$, $\eta=\partial\psi/\partial t$ ---(8)

$H=f(\bar{L},\bar{Q})=f(L,Q,t)=f(\phi,\psi)=g(f(L,Q,0),t)=F_t[H]$ ---(9)

$\partial R/\partial t=\partial(\partial g/\partial L/\partial g/\partial Q)/\partial t=0$ --(10)

$\xi\,\partial f/\partial L+\eta\,\partial f/\partial Q=G(f)$, $G(f)$：$f$に関する任意汎関数 --(11)

$\xi\,\partial h/\partial L+\eta\,\partial h/\partial Q+\rho\,\partial h/\partial(dL/dQ)=0$ 、ただし$h=dL/dQ+N(L,Q)/M(L,Q)$, $\rho=\partial\xi/\partial Q+(\partial\xi/\partial L-\partial\eta/\partial Q)dL/dQ-(\partial\eta/\partial L)(dL/dQ)^2$ --(12)

［定理1］嗜好変化$T_t$のもとで住宅生産関数が完全変換可能であるための必要十分条件は、嗜好変化の衝撃の第1次測度が生産関数そのものの任意の汎関数$G(f)$となることである。すなわち式(11)が成立することである。

表-1 嗜好変化と生産関数の完全変換可能性（一部）

| Lie群 | 生産関数の一般形 | 限界代替率関数(p=dL/dQ) |
|---|---|---|
| $\bar{L}=L+\alpha t, \bar{Q}=Q+\beta t$ | $L\Psi(\alpha Q+\beta L)$ | $p=-\Psi'(\alpha Q+\beta L)$ |
| $\bar{L}=\exp(\alpha t)L$<br>$\bar{Q}=\exp(\beta t)Q$ | $L^{1/\alpha}\Psi(Q^{\alpha}/L^{\beta})$ | $p=(L/Q)\Psi(Q^{\alpha}/L^{\beta})$ |
| $\bar{L}=[L^{-a}+\alpha t]^{-1/a}$<br>$\bar{Q}=[Q^{-b}+\beta t]^{-1/b}$ | $L^{-a}/\alpha+\Psi(I)$<br>$I=\alpha Q^{-b}-\beta L^{-a}$ | $p=[L^{-b-1}-Q^{-a-1}]^{-1}\Psi(I)$ |

$\Psi$：任意関数、$a, b, \alpha, \beta$：パラメータ

住宅生産関数が完全変換可能であれば、そこから導出される限界代替率は不変となる。限界代替率が嗜好変化に対して不変となる必要十分条件は拡大されたLie変換$\rho$のもとで、式(12)が成立することである。式(12)の一般解を求めれば、限界代替率関数の一般型を得る。嗜好変化が起こっている場合には、その嗜好変化に対して不変である限界代替率関数を用いてまず限界代替率を計測し、その結果を用いて限界代替率関数の背後にある生産関数を導出するという手順をふまなければならない。偏微分方程式(12)の一般解を求めることにより次の定理を得る。

［定理2］資本-土地限界代替率が嗜好不変であれば、住宅市場において観測可能な独立した二つの不変量$I_1(L,Q)$, $I_2(L,Q,dL/dQ)$が存在し、限界代替率関数の一般形は$\nu(I_1,I_2)$となる。

ある生産関数に対応する住宅市場の観測を通じて不変量$I_1$、$I_2$が観測できれば、当該の生産関数は嗜好変化に対して完全変換可能であり、限界代替率関数$\nu$を用いて生産関数を計測できる。いうまでもなく、任意のタイプの嗜好変化に対して完全変換であるような住宅生産関数は存在しない。したがって、本研究ではありうべき嗜好変化のタイプを想定するとともに、それぞれのタイプに対して完全変換可能な生産関数の一般型を求めることとした。一般に無限小変化のタイプは無限個存在する。本研究では嗜好変化のタイプとして従来の研究で用いられた嗜好変化や技術変化といった経済変換のタイプをできるだけ網羅的に想定するとともに、それぞれのタイプに対して完全変換可能な住宅生産関数と限界代替率関数を求めた。紙面の都合上、結果の詳細は参考文献に譲りここではその結果の一部を表-1に示すにとどめる。なお、実践的には分析に先立って住宅市場で観測される家計の嗜好変化をあらかじめ計測しておく方が望ましい。このような嗜好変化の計測問題、すなわち、Lie変換群の推定問題に関しては講演時に述べることとする。

## 5．おわりに

本研究における重要な知見の一つは所与の嗜好変化のタイプに応じて用いることのできる関数式の形が限定されるということである。生産関数が嗜好変化に対して完全変換可能でなければ関数式が成立するのは観測時点のみであり、時間とともに対象とする現象とモデルは著しく乖離する。このことは生産関数のみならず都市交通モデル一般においても成立するが、これに関しては別の機会に発表することとする。

(参考文献)W.B.Zhang, K.Kobayashi, and K.Yoshikawa: Housing production functions and taste changes of households, Kyoto University Research Report, (to be published), 1987.