

## 非線形計画法に基づく帶水層定数同定に関する基礎的検討（第二報）

徳島大学 工学部 正 山上 拓男  
徳島大学 大学院 学 ○安富 英樹

1. まえがき：平面地下水解析を行なう場合、その精度は帶水層定数すなわち透水係数と貯留係数（有効空隙率）の値に大きく依存している。そして通常これら定数はいわゆる揚水試験で決定されている。しかし対象領域が広域に及べば、揚水試験は不経済となるばかりか、地層構成や境界条件が複雑な場合には実施不可能な事態に落に入ることも少なくない。こうした難点に対処する1つの方策として近年逆問題により帶水層定数を定める方法が注目を集めている。前報では同じ立場から、帶水層定数同定（逆解析）のために非線形計画法としてNelder-MeadのSimplex法、Hooke-Jeeves法及びPowell法を採用した場合の基礎的検討を行なった。本報告はこれら手法に加え、探索法として新たに修正Marquardt法及びGauss-Newton法を用いた場合の帶水層定数同定に関する検討結果を述べるものである。

2. 非線形計画法に基づく帶水層定数同定のアルゴリズム：本研究の対象とする帶水層定数同定問題の解析は、まず地下水動態観測データと数値解析結果から目的関数（式(1)）を定義し、次いで非線形計画理論の援用によってこの目的関数の最適解を探索するという手順で行なわれる。

図-1に示すように平面地下水解析場に適当な数の観測点を設定する。そして任意の透水係数 $a_x, a_y$ 、貯留係数 $\beta$ のもとにFEM解析を行ない、各観測点における計算地下水位（or計算地下水頭）を求める。この結果 計算地下水位と実測水位に基づいて次式を定義する。：

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (H_{i,j}^{ob} - H_{i,j}^{fe})^2 \quad \dots \dots (1)$$

ここに、 $H_{i,j}^{ob}$ ：観測点 $i$ におけるSampling時刻 $j$ での実測水位、 $H_{i,j}^{fe}$ ：観測点 $i$ におけるSampling時刻 $j$ での計算(FEM解析)水位、 $m$ ：観測点数、 $n$ ：時間軸上のSampling Pointsの数（定常問題のときは $n=1$ ）。そして $U$ は、逆算パラメータ $a_x, a_y, \beta$ の関数すなわち  $U = U(a_x, a_y, \beta) \dots \dots (2)$  であると考える。式(1)は、任意の一組の $a_x, a_y, \beta$ のもとで一般に正の値を与える。そして、たまたま真の値の $a_x, a_y, \beta$ を代入したときのみ $U$ は零となる。いいかえると、式(1)の $U$ を最小（実は零）にする $a_x, a_y, \beta$ が見つかれば、それがこの平面地下水解析場の帶水層定数( $a_x, a_y, \beta$ )である。そこで、式(1)を非線形計画法における目的関数とみなす。非線形計画法には、目的関数の勾配（導関数）を利用する手法と勾配を利用しない手法があり、式(1)を最小にする手法として前者において修正Marquardt法及びGauss-Newton法を、後者においてNelder-MeadのSimplex法、Hooke-Jeeves法及びPowell法を採用した。

ここで、式(1)の計算水位を定めたのに採用された地下水支配微分方程式を要約しておく。図-2で、帶水層底面ABの勾配はDupuitの仮定が成り立つほどに十分小さいものとする。DLを基準面とし、これから自由水面までの高さを $H$ 、不透水底面の高さを $\eta$ とすれば次式を得る。：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ a_x (H-\eta) \frac{\partial H}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ a_y (H-\eta) \frac{\partial H}{\partial y} \right\} + Q_T - \beta \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots (3)$$

ここに、 $Q_T = N - Q$ 、 $N$ ：単位面積当たりのaccretion( $N > 0$ )、or evapo-transpiration( $N < 0$ )、 $Q = \sum_i Q_i \cdot \delta(x-x_i, y-y_i)$  で $Q_i$ は点 $(x_i, y_i)$ に存在する井戸の揚水量( $Q_i > 0$ )、or 注水量( $Q_i < 0$ )、 $m$ は井戸総数、 $\beta$ ：貯留係数（有効空隙率）、 $a_x, a_y$ ：透水係数である。

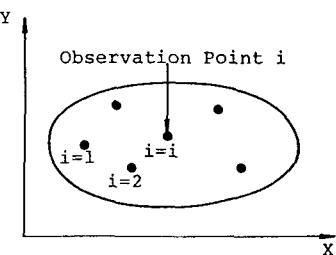


図-1 平面地下水解析場

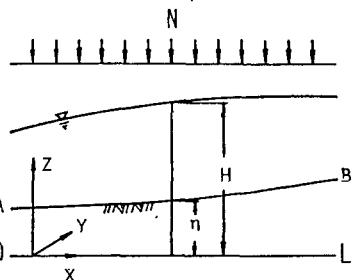


図-2 平面地下水流れの鉛直図

3. 適用例： ここでは、きわめて理想化された不圧帶水層の同定問題を解析した結果を述べる。

問題は図-3にみられる放射状領域を対象とする。帶水層は等方性で水平とし、最遠部の境界は不透水境界で初期水位は10mを与える。この放射状領域の原点側（節点1,2）の外水位を $0.1 \text{ m/day}$ の速さで10日間低下させ、以後一定（水深9m）に保った場合（Case1）と、同様に原点側（節点1,2）の外水位を10日間低下させた後、2日間は $20 \text{ mm/h}$ の降雨があり、その後降雨は $0 \text{ mm/h}$ とした場合（Case2）の2種類を想定した。

ここで、それぞれの場合につき帶水層定数として、 $\alpha = 8.64 \text{ m/day}$ ,  $\beta = 0.3$ を用いてFEM解析を行なった結果をこの放射状領域の実測水位とみなす。つまり逆解析すべき帶水層定数は、 $\alpha = 8.64 \text{ m/day}$ ,  $\beta = 0.3$ となる。以上の条件のもとに種々の状況を想定して解析を行なった。それらのうち表-1, 表-2にはそれぞれ、初期値に $\alpha = 47.52 \text{ m/day}$ ,  $\beta = 0.2$ を与え図-3の放射状領域の節点番号3と29に観測点を設けた場合のCase1とCase2の各手法における解析結果を示している。表-1の結果をみると、透水係数 $\alpha$ と貯留係数 $\beta$ の値はそれぞれ真の値（ $\alpha = 8.64 \text{ m/day}$ ,  $\beta = 0.3$ ）から掛け離れているものがある。これは、降雨が無い場合には $\alpha$ と $\beta$ の値にかかわらずそれらの比 $\alpha/\beta$ が等しくければ帶水層内の時間的水位変動がよ、たく等しくなってしまう、という事実に起因している。すなわちこの場合には、 $\alpha$ と $\beta$ の真値をそれぞれ独立に探索するのではなく、その比 $\alpha/\beta$ の真値を探索しているのである。そこで、 $\alpha/\beta$ の値をみてみると、どの手法においても真のそれ（ $\alpha/\beta = 28.8 \text{ m/day}$ ）に対し満足し得る結果が得られている。なお、初期値の比の値は、 $\alpha/\beta = 237.6 \text{ m/day}$ である。一方、降雨のある場合には、 $\alpha$ と $\beta$ の値をそれぞれ独立に求めることができ、表-2にみられるようにほとんど正解そのものが探索されている。

これらの解析例より、目的関数の勾配を利用する手法（修正Marquardt法及びGauss-Newton法）は勾配を利用しない他の手法に比べて収束までに用いた浸透解析（FEM解析）数が少なくて効率が良いことがわかる。

4. おわりに： 本研究では帶水層定数同定のために、非線形計画法として修正Marquardt法、Gauss-Newton法、Simplex法、Hooke-Jeeves法及びPowell法を採用した。そして均質な不圧帶水層で数値実験を行なった結果、各手法とも良好な探索結果を得ることができた。計算コストの面では目的関数の勾配を利用する手法が勾配を利用しない手法より効率の良いことがわかった。今後他の非線形計画法を用いた解析、実際問題への応用などさらに検討してゆくことが望まれる。

[参考文献] 1)山上ら：非線形～、第38回中皿土木学会、昭和61年。2)中川徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析プログラムSALS、東京大学出版会、1984。3)山上ら：平面地下水～、第19回土質工学会、昭和59年。

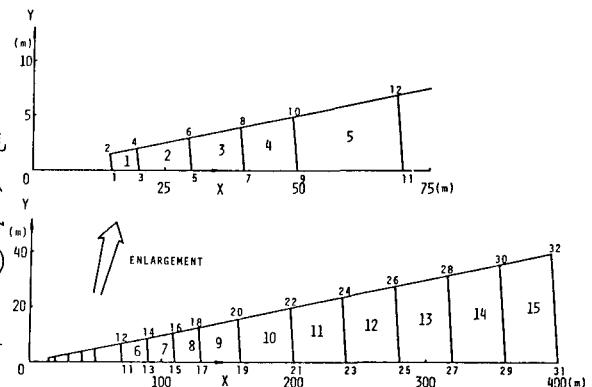


図-3 放射状領域

表-1 Case1 の解析結果

降雨無し（真値  $k = 8.64 \text{ (m/day)}$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $k/\beta = 28.8 \text{ (m/day)}$ ）

解析手法	反復回数 (回)	浸透解析 総数 (回)	透水係数 $k \text{ (m/day)}$	貯留係数 $\beta$	$k/\beta$ $(\text{m}/\text{day})$	演算時間 (S)
修正 Marquardt 法	6	20	138 866	4.86	28.60	7.05*
Gauss - Newton 法	7	26	58 167	2.03	28.68	7.04**
Simplex 法	11	31	8.012	0.30	27.08	27.93
Hooke - Jeeves 法	18	73	8.520	0.30	28.52	52.91
Powell 法	2	47	16.646	0.68	24.47	38.30

\* 東京大学大型計算機センター（M-682 H）、他は徳島大学情報処理センター（M-360）

表-2 Case2 の解析結果

降雨有り（真値  $k = 8.64 \text{ (m/day)}$ ,  $\beta = 0.3$ ）

解析手法	反復回数 (回)	浸透解析 総数 (回)	透水係数 $k \text{ (m/day)}$	貯留係数 $\beta$	演算時間 (S)
修正 Marquardt 法	6	20	8.575	0.30	8.88*
Gauss - Newton 法	4	14	8.577	0.30	9.01**
Simplex 法	28	81	8.648	0.30	113.56
Hooke - Jeeves 法	20	73	8.708	0.30	106.85
Powell 法	4	109	8.539	0.30	149.27

\* 東京大学大型計算機センター（M-682 H）、他は徳島大学情報処理センター（M-360）