有限要素法による越流水脈形状の一計算法

岡山大学工学部　正員　名合　宏之
岡山大学工学部　正員　○前野　詩朗
復建調査設計㈱　　久岡　弘行

１．まえがき　越流型フラップゲートに作用する流体力特性を解明するために、前報[1)]では、重力の影響を無視した２次元ポテンシャル流を仮定して理論解析を行ったが、ゲート高に対して越流水深が大きくなると実験値と一致しなくなるという結果を得た。これは、越流型ゲートにおいては、越流水脈形状が重力の影響を大きく受けるためであると考えられる。このように、越流型ゲートの水理特性を明らかにするためには、重力の影響を考慮した越流水脈形状を理論的に求めることが必要となってくる。従来より、自由表面を有する流れの自由表面形状を求める研究の多くは、底流型ゲートからの流出やダムの越流頂を越える流れなどのように、一方が固定境界で他方が自由表面であるという場合がほとんどであった。ところが、本研究で対象とする越流型フラップゲートにおいては、フラップゲート先端部より下流側においては２つの自由表面が存在しており、これを解くにはかなり困難を伴うことが予想される。本研究は、このような問題の解析法の１つとしてM.Castro-Delgado[2)]らが提案している有限要素法による解析法の適用性について検討しようとするものである。この方法の特徴は、三角形要素の各節点における流れ関数の値とｘ座標を固定してｙ座標を未知数として解くことである。

２．理論解析法および計算条件　図１は解析モデルである。流れが２次元非回転であるとすると、ポテンシャル理論より、流れの領域はラプラスの式(1) および式(2) ～(5) の境界条件により決定される。

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = 0 \quad (1)$$

ＡＢ上で　$\psi = 一定 = q$　(2)

ＡＢ，ＣＤ上で　$\partial \psi / \partial n = -\sqrt{2gy}$　(3)

ＣＤＤ′Ｅ上で　$\psi = 0$　(4)

ＡＥ，ＢＣ上で　$\partial \psi / \partial n = 0$　(5)

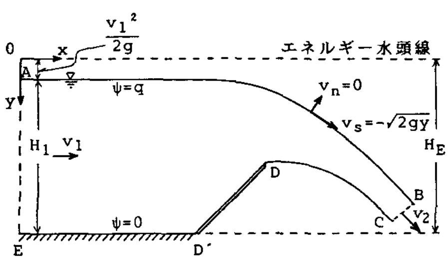

図１　解析モデル

ここに、ψ：流れ関数，ｑ：単位幅流量，ｇ：重力加速度，ｎ：境界より外向きの法線である。境界ＡＥとＢＣはそれぞれ越流部分から十分に離れた上流と下流にあるとしている。与えられた境界条件のもとでラプラスの方程式を解くことは困難であるので、ここでは、次式で表わされる汎関数を導入する。

$$I = \iint \{(\partial \psi / \partial x)^2 + (\partial \psi / \partial y)^2\} dxdy \quad (6)$$

変分法によると、上式の汎関数を最小にすることはラプラスの式(1) および境界条件(2) ～(5) を満たすことである。すなわち、上式の変分は

$$\delta I = -2\iint \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \delta \psi dxdy - \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 (\delta x dy - \delta y dx) \quad (7)$$

となるから、$\delta U = \delta I + \delta \Gamma$，$\delta \Gamma = \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 (\delta x dy - \delta y dx)$という関数を定義すれば、結局、$\delta U = 0$とおくことによりラプラスの式(1) および境界条件を満足するような流れの領域を求めることができる。ここでは、有限要素法による離散化を行い解析する。まず、図２のように流れ関数$\psi = \alpha_i q$（$i = 1 \sim P$）とｘ座標との交点を節点として三角形要素に分割する。つぎに代表的な三角形要素を考え、流れ関数ψがｘとｙの一次変換で表わされるものとすれば次式のようになる。

$$\psi = \{N_i, N_j, N_k\} [\psi_i, \psi_j, \psi_k]^T \quad (8)$$

ここに、N_i, N_j, N_k は形状関数であり次式のように表わされる。

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2A$$
$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/2A \qquad (9)$$
$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y)/2A$$

上式中の記号は表１に示してある。さらに、図２の領域における各節点の未知数をｙ座標のみに限定すればδＵ＝$F_m(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ と書くことができる。ここに、ｍはｙ座標が未知の節点番号であり、Ｎはその合計数である。ここに、

$$F_m = \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\sum_e I^e\right)\delta y_m + \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\sum_e \Gamma^e\right)\delta y_m \qquad (10)$$

である（表２参照）。これらはＮ個の連立非線形方程式であるので NEWTON 法を用いることにより解を求めることができる。

図３は初期条件であり、図２は要素分割図である。図中に示されるように、下側の自由表面形状は越流頂の Harrold 曲線を採用した。また、上側の自由表面については適当な区間を区切って直線で近似した。実際の数値計算は、流量を仮定して、下側の自由表面を固定して上側の自由表面を収束させ、次に上側の自由表面を固定し下側の自由表面を収束させるというふうに交互に自由表面を固定して数値計算を行った。

３．結果　図４は計算結果である。図中の○印は実験値である。この図より、計算結果は実験値とよく一致していることがわかる。また、流線の形もよく再現できているものと考えられ、今回ここで示した手法は自由表面形状を再現する有効な方法であることがわかる。本計算法において問題点となるところは、最下流端の取り扱いでありで、今回の計算においてはこの部分の流速分布を等間隔に与えて計算を行った。今後は、この最下流端部の取り扱いをより実際に近い形に改良していく必要があると考えている。

参考文献

1)名合他：越流型フラップゲートに作用する流体力特性に関する研究，第37回中四支部講演概要集，1985

2)M.Castro-Delgado : ANALYSIS OF FREE-SURFACE FLOWS PAST OVER FLOW GATES USING FINITE ELEMENT METHOD : Computers & Fluids, Vol.14, No.2, 1986

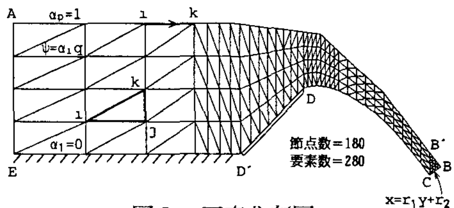

図２　要素分割図

表１　代表的な三角形要素ｉ，ｊ，ｋに関する記号の定義

	i	j	k
a	$x_k y_j - x_j y_k$	$x_i y_k - x_k y_i$	$x_j y_i - x_i y_j$
b	$y_k - y_j$	$y_i - y_k$	$y_j - y_i$
c	$x_j - x_k$	$x_k - x_i$	$x_i - x_j$
Ψ	$\psi_k - \psi_j$	$\psi_i - \psi_k$	$\psi_j - \psi_i$
A	$(a_i + a_j + a_k)/2$		
Ψ_x	$(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)/2A$		
Ψ_y	$(c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)/2A$		

表２

$\frac{\partial}{\partial y_m} I_{ijk}$	0	$m \neq i_{or} j_{or} k$
	$-\Psi_x \Psi_m - 0.5(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)c_m$	$m = i_{or} j_{or} k$ and $x_m \neq r_1 y_m + r_2$
	$-(\Psi_x - r_1 \Psi_y)\Psi_m$ $-0.5(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)(c_m + r_1 b_m)$	$m = i_{or} j_{or} k$ and $x_m = r_1 y_m + r_2$
$\frac{\partial}{\partial y_m}\Gamma$	0	$m \neq i_{or} k$
	$-g y_m \Delta x$	$m = i_{or} k$, $m \neq$ B～B
	$-g y_m \Delta x + g r_1 y_m \Delta y$	$m = i_{or} k$, $m =$ B～B

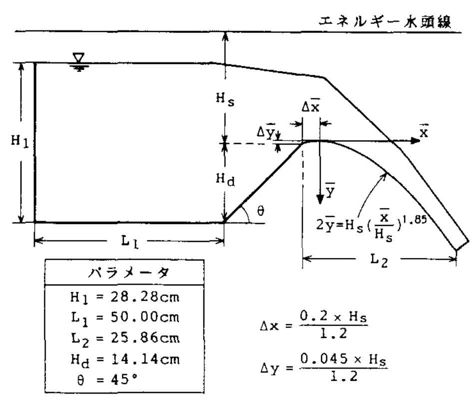

図３　初期条件

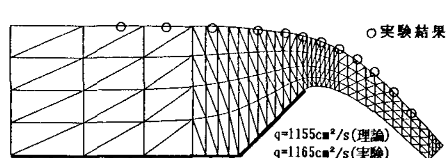

図４　計算値と実験値