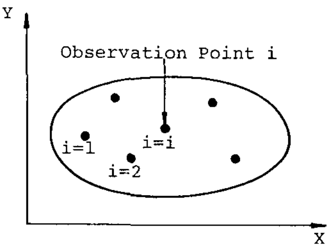
非線形計画法に基づく帯水層定数同定に関する基礎的検討

徳島大学　工学部　正　　山上　拓男
愛媛県　　　　　　　　　菅野　聖司
徳島大学　大学院　学　○安富　英樹

1．まえがき：平面地下水解析を行う場合、その精度は帯水層定数すなわち透水係数と貯留係数（有効空隙率）の値に大きく依存している。そして通常これら定数はいわゆる揚水試験で決定されている。しかし対象領域が広域に及べば、揚水試験は不経済となるばかりか、地層構成や境界条件が複雑な場合には実施不可能な事態に落入ることも少なくない。こうした難点に対処する１つの方策として近年逆問題により帯水層定数を定める方法が注目を集めている。本報告も同じ立場から、非線形計画法に基づいた帯水層定数同定（逆解析）に関する基礎的検討結果を述べるものである。



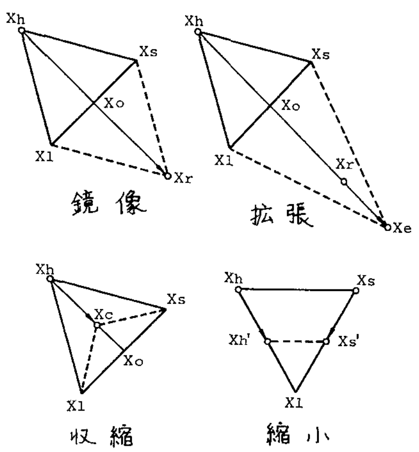
図－１　平面地下水解析場

2　非線形計画法に基づく帯水層定数同定のアルゴリズム：本研究の対象とする帯水層定数同定問題の解析は、まず地下水動態観測データと数値解析結果から目的関数（式(1)）を定義し、次いで非線形計画理論の援用によってこの目的関数の最適解を探索するという手順で行なわれる。

図－１に示すように平面地下水解析場に適当な数の観測点を設定する。そして任意の透水係数k_x, k_y, 貯留係数βのもとにＦＥＭ解析を行い、各観測点における計算地下水位（or計算地下水頭）を求める。その結果、計算地下水位と実測水位に基づいて次式を定義する。

$$U=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(H_{i,j}^{ob}-H_{i,j}^{fe}\right)^2 \text{ -----(1)}$$

ここに、$H_{i,j}^{ob}$:観測点 i における Sampling 時刻 j での実測水位, $H_{i,j}^{fe}$:観測点 i における Sampling 時刻 j での計算（ＦＥＭ解析）水位, m：観測点数, n：時間軸上の Sampling Points の数（定常問題のとき n＝１）。そして U は、逆算パラメータ k_x, k_y, β の関数すなわち　$U=U(k_x,k_y,\beta)$ ------(2)　であると考える。式(1)は、任意の一組の k_x, k_y, β のもとで一般に正の値を与える。そして、たまたま真の値の k_x, k_y, β を代入したときのみ U は零となる。いいかえると、式(1)の U を最小（実は零）にする k_x, k_y, β が見つかれば、それがこの平面地下水解析場の帯水層定数（k_x, k_y, β）である。そこで、式(1)を非線形計画問題における目的関数とみなす。この目的関数は勾配（導関数）を求めることが非常に困難であるので、式(1)を最小にする手法として、目的関数の勾配を必要としない Nelder-Mead の Simplex 法[1]を採用する。また、比較のため Hooke-Jeeves 法[1]、Powell 法[2]についても検討してみる。Simplex 法は、n次元空間においてシンプレックスと呼ばれる n＋１個の頂点がつくる多角形がおもな役割を果たす。この方法では、シンプレックスの各頂点で目的関数の値を比較し、シンプレックスが鏡像, 拡張, 収縮及び縮小と呼ばれる４つの操作の適当な組み合わせを繰り返し継続しつつ最適解へ向って移動する。図－２に２次元の場合についての各操作を示す。ここに、X_hは１つのシンプレックスで目的関数が最大値をとる頂点、X_sは目的関数が２番目に大きい値をとる頂点、X_lは目的関数が最小値をとる頂点、X_oはX_hを除く他の頂点X_sとX_lとの図心、X_r, X_e, X_cは各操作によりX_hを置き換えた点、X_h', X_s'は縮小によりX_h,



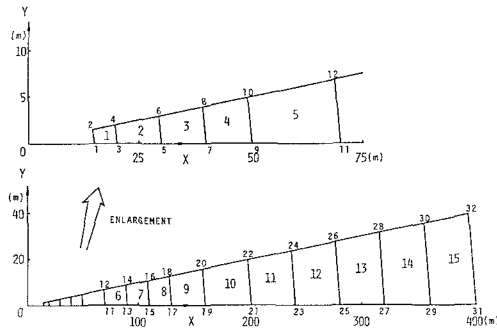
図－２　２次元での Simplex 法の各操作

Xsを置き換えた点である。Hooke-Jeeves法は　出発点からパラメータを１度に１つずつかえて進み　これが一巡すると出発点と最後の点を結ぶ方向に試行点を移行して最適解に近づいてゆく方法であり、Powell法は、順次共役方向を生成して最適解を探索する方法である。

3　適用例　：　ここではきわめて理想化された不圧帯水層の同定問題を解析した結果とそれによって得られた知見を要約する。まずはじめに式(1)の計算水位を定めるのに採用された地下水支配微分方程式を摘記しておこう[3]：

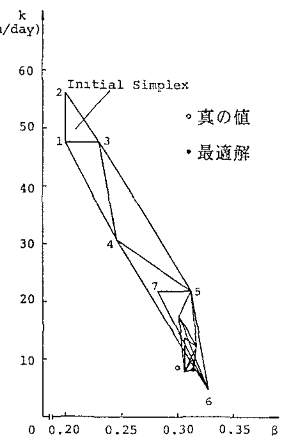
$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_x(H-\eta)\frac{\partial H}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{k_y(H-\eta)\frac{\partial H}{\partial y}\right\}+Q_T-\beta\frac{\partial H}{\partial t}=0 \cdots(3)$$

用いた記号の意味は文献3)を参照されたい。問題は図－３にみられる放射状領域を対象とする。帯水層は等方性で水平とし、最遠部の境界は不透水境界で初期水位は10 mを与え、この放射状領域の原点側（節点1, 2）の外水位を0.1 m/dayの速さで10日間低下させ、以後一定（水深9 m）に保った場合を想定する。ここで、帯水層定数は k=8.64 m/day, β = 0.3を用いてＦＥＭ解析を行った結果をこの放射状領域の実測水位とみなす。

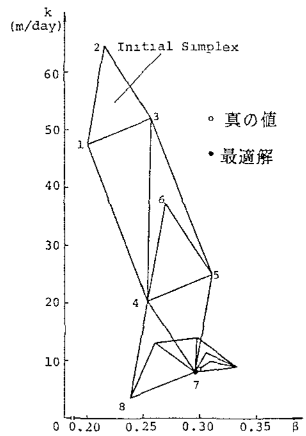


図－３　放射状領域

以上の条件のもとに種々の状況を想定して解析を行なったが、それらのうち図－4,5には、図－３の節点番号３と29に観測点を設け、Simplex法により逆解析した結果を示している。これらの図は初期シンプレックスに異なる形状を与えて収束解（最適解）に到る経過を見たものである。両者ともに反復回数11回で収束しており、得られた最適解は図－４に対して k = 8.23 m/day, β = 0.32；図－５に対して k = 8.01 m/day, β = 0.30であった。



図－４　収束計算の経過



図－５　収束計算の経過

多くの解析例を通して、以下のような結論を得た：まずSimplex法に関しては、①観測点は、領域全体にわたってカバーするほうが、狭い範囲に集まる場合より、収束するまでの反復回数は少なく最適解も真の値に近くなる。②解析期間の長いほうが、最適解は真の値に近づく。③観測点の数が多いほど、良い結果が得られるとはいえない。一方、Hooke-Jeeves法では、初期値が同じでも未知パラメータの増分量の初期値が異なると最適解が変わる。従って真の値に最も近い最適解を得るためには、どの程度の未知パラメータの増分量の初期値を与えればよいかといった点を検討する必要がある。Powell法では、未知パラメータが k のみの場合は収束したが、未知パラメータが k と β の２つでは最適解探索は失敗に終った。現時点でその原因は不明である。３手法を比較すると、Simplex法は、Hooke-Jeeves法、Powell法に比べて収束までの演算時間が短かく、Hooke-Jeeves法における未知パラメータの増分量の初期値の決定方法が不明であるとか、Powell法における探索失敗の原因が不明であるといった困難な問題もなくこれら手法の中で最も効率の良い方法であることが判明した。

4．おわりに　：　本研究では帯水層定数同定のために、非線形計画法としてSimplex法、Hooke-Jeeves法及びPowell法を用いた。今後は、実際の地盤について解析を行い、本手法の妥当性をたしかめること、そして他の非線形計画法を用いて解析するなど、さらに検討していく必要があると考えている。

〔参考文献〕1) J.コワリック，M.R.オスボーン：非線形最適化問題，培風館，1971．2)志水清孝：システム制御と数理計画法，コロナ社，1975．3)山上，仁田，山川：平面地下水解析に～，第31回土質工学会，昭和51年．