

DPに基づく有限要素応力場の潜在すべり面探索について

— 平滑化応力の導入 —

徳島大学 工学部 正 山上 拓男
徳島大学 工学部 正 植田 康宏
中電技術コンサルタント 正 〇小山 正之

1. まえがき : FEMは土構造物内の応力分布を求める大変強力な手段である。しかし、いくら高精度の応力分布が与えられても、それによってただちに構造物全体としての安全率を知ることはできない。このFEMの最大の難点を解消すべく、筆者らは、動的計画法(DP)を用いて、与えられた有限要素応力場に潜在する全体安全率最小の曲面(潜在すべり面)とそのときの安全率の値を探索する手法をすでに発表している¹⁾。ただし、ここでは要素内応力を一定と仮定していた。本報告では新たに有限要素網の節点で平滑化された応力を用い要素内応力の変化を考慮した方法を提案するとともに簡単な適用例を示す。

2. DPに基づく潜在すべり面決定 : 文献1)で述べたように与えられた応力場の任意の2点A,Bを結ぶ任意の曲線 $\widehat{AB}$ に沿って全体安全率 F_s を次式で定義する : $F_s = \int_A^B T_t ds / \int_A^B ds \dots (1)$ ここに T_t はそれぞれせん断抵抗とせん断応力である。このとき新たな変数 G を持ち込んで $G = \int_A^B (T_t - F_s \cdot T) ds \dots (2)$ と定義すれば、式(1)の F_s を最小にすることと式(2)の G を最小にすることがまったく同等であることが知られている²⁾。求めるA,B2点間の潜在すべり面はいうまでもなく F_s を最小とするものである。ところが理論構成上、式(1)を直接最小化することはできないので、これに代わって式(2)の G の最小化を図る。その際、数値解析の便宜上式(2)を離散形で表示する : $G = \sum_{j=1}^n (R_L - F_s T_L) \dots (3)$ さて、目下の問題にDPを適用するに当たっては、図-1に示すように解析領域に適当な数のstageおよびstateを設置する必要がある。いま図-2に示すように任意の引き続く2つのstage $i, i+1$ 上の任意のstate j および k に注目し、これら2点を結ぶ軌道 $\widehat{jk}$ を可能なすべり面の一部とみなす。このとき軌道 $\widehat{jk}$ 間のせん断力 T_L とせん断強さ R_L をFEMによる応力分布から評価できたとすれば、この2点間の式(3)に寄与する G の変化(return) $\Delta G_L(j, k)$ は、 $\Delta G_L(j, k) = R_L - F_s T_L$ 図-1 DPによる潜在すべり面探索

$\dots (4)$ である。ここで点Bから点 (i, j) に至る G の最小値を $H_L(j)$ で表すと、最適性

原理から次の関数再帰方程式が導かれる : $H_L(k) = \min_{j=1 \sim j_i} [H_L(j) + \Delta G_L(j, k)]^{i=1 \sim n}, H_L(1) = 0 \dots (5)$

そしてこの漸化式をすべてのstage, stateに適用してゆけば図-1の曲線 $\widehat{AB}$ の如き潜在すべり面が得られる。ただし式(3)の F_s は未知なので繰返し計算を行う必要がある。 図-2 最適性原理の応用

3. 平滑化応力を用いたreturnの計算 : 筆者らはこれまで要素内応力を一定と仮定して上記のreturnを求めてきたが、DP探索の精度を高めるためには要素内応力の変化を考慮した手法を検討すべきである。このためここでは平滑化された節点応力の導入を試みる。ただし紙数の制約上四角形要素を対象とした場合についてのみ説明を行う。いま応力の平滑化によりある四角形要素の4節点(コーナー)の応力密度が与えられているとすると、1つの可能性として要素内応力の変化 $\tilde{\sigma}$ は次の多項式で表される : $\tilde{\sigma} = a + bx + cy + dx^2y$ (a, b, c, d は定数) $\dots (6)$ しかしながら式(6)では要素の各辺が x 軸もしくは y 軸に平行でなければ要素間で応力の連続性が保たれない。そこで要素内応力の変化を考慮し、かつ要素間で応力の連続性を保つためにisoparametric要素の概念である局所(自然)座標系 (ξ, η) を用いて要素内応力を表示する : $\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^4 N_i \tilde{\sigma}_i \dots (7)$ ここに、 $\tilde{\sigma}_i$ = 平滑化により与えられた各節点の任意の応力成分、 N_i = 形状関数で $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \dots (8)$ など、と

定義されている。さて、図-3に示すように任意の要素③の軌道に沿うせん断抵抗とせん断力をそれぞれ R_t^e と T_t^e と表すと次式を書くことができる： $R_t = \sum R_t^e$ ， $T_t = \sum T_t^e$ …(9) ここに、 $R_t^e = \int_{I_{xy}}^{II_{xy}} \tau_t dl$ ， $T_t^e = \int_{I_{xy}}^{II_{xy}} \tau_t dl$ …(10) また、 dl は軌道に沿う微小長さ、点 I_{xy} 、 II_{xy} は要素境界と軌道の交点で、添字は x - y 座標系で表されていることを意味する（図-4参照）。ここで上式の積分を式(7)を用いて局所座標系で行うために、積分に関連した諸量を全体座標系から局所座標系に変換しなければならない。図-5はこのための要素③の局所座標系表示であり、点 $I_{\xi\eta}$ 、 $II_{\xi\eta}$ はそれぞれ I_{xy} 、 II_{xy} に対応している。いま、点 $I_{\xi\eta}$ 、 $II_{\xi\eta}$ の座標をそれぞれ (ξ_1, η_1) 、 (ξ_2, η_2) とする。また、図に示したように点 I 、 II 間の x 方向、 y 方向における距離をそれぞれ l_{xy} 、 $l_{\xi\eta}$ と表すと、 $dl = dx / \cos \theta$ ， $dx = l_{xy} d\xi / l_{\xi\eta}$ (θ = 軌道が x 軸の正の方向となす角) なる関係から式(10)を次のように書き換えることができる：

$$R_t^e = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{l_{xy}}{l_{\xi\eta}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \tau_t d\xi, \quad T_t^e = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{l_{xy}}{l_{\xi\eta}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \tau_t d\xi \quad \dots (11)$$

ここで式(7)を用いて τ_t は次のように表される： $\tau_t = C + \tan \phi \cdot \sum_{i=1}^4 N_i \bar{\sigma}_i$ ， $\bar{\sigma}_i = \sum_{j=1}^4 N_j \bar{\sigma}_j$ …(12) ($\bar{\sigma}_i$ は要素③の4節点における、目下の軌道に平行な面上の平滑化された垂直応力およびせん断応力)。このとき式中の N_i は式(8)にみられるように、 ξ 、 η の関数であるから、 ξ - η 座標系における軌道の式を $\eta = p\xi + q$ と表し η を消去すれば、式(11)の被積分関数を ξ だけの関数とすることができ。そして最終的に次式が導かれ、式(9)よりこの場合の return が計算できる。

$$R_t^e = \frac{l_{xy}}{4 \cos \theta} \cdot \left(C + \frac{\tan \phi}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 M_i \bar{\sigma}_i \right), \quad T_t^e = \frac{l_{xy}}{4 \cos \theta} \cdot \sum_{i=1}^4 M_i \bar{\sigma}_i \quad \dots (13)$$

ここに、 $M_1 = (1-q) + (-1-p+q) \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + \frac{p}{3} (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2)$ 、など。

4. 適用例および結言：ここではプログラムが正しく演算を遂行するか否かをチェックする目的で、三軸圧縮試験時の如き一様応力場に適用した結果を呈示する。問題ならびに探索結果を図-6、7に示す。図-6は鉛直方向に最大主応力 σ_1 、水平方向に最小主応力 σ_3 が作用する三軸圧縮状態の供試体を表し、

図-7は σ_1 と σ_3 を入れ替えた三軸伸張状態の供試体を表している。いずれも、

$$\sigma_1 = 1.659 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2,$$

$$C = 0.1 \text{ kg/cm}^2, \quad \phi = 10^\circ \text{ とした。}$$

両者とも探索結果は厳密解に一致した。

【参考文献】1) 山上・植田・小山：第39回土木学会講演概要集、第3部門、pp. 157~158、昭和59年。

2) Iu. P. Petrov, : Variation-
al Methods in Optimum
Control Theory, Academic
Press, pp 144~147,
1968。

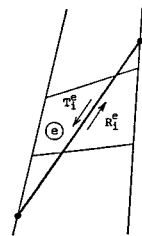


図-3 returnの計算

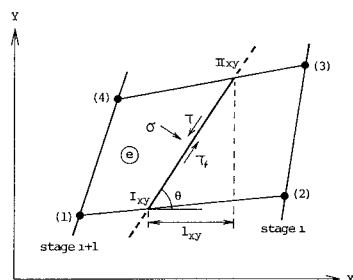


図-4 要素③の全体座標系表示

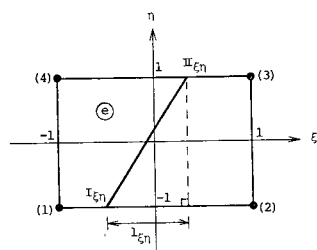


図-5 要素③の局所座標系表示

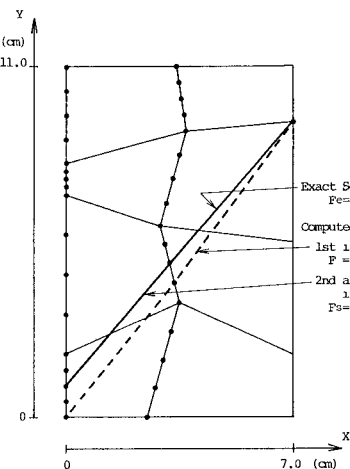


図-6 探索結果(三軸圧縮状態)

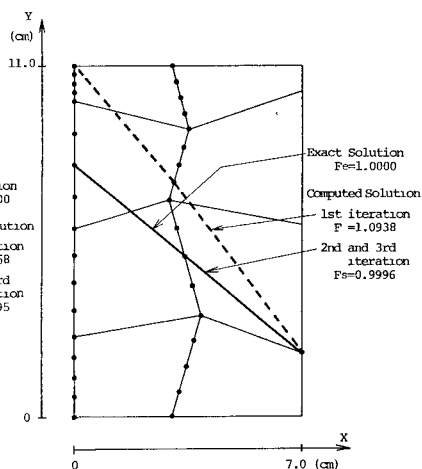


図-7 探索結果(三軸伸張状態)