楕円形要素を用いた離散剛要素法の基礎的検討

鳥取大学大学院　学生員　○川崎　了
鳥取大学工学部　正会員　木山　英郎
鳥取大学工学部　正会員　藤村　尚
鳥取大学工学部　正会員　西村　強

1．まえがき

本研究は、離散剛要素法（ Distinct Element Method，以下ＤＥＭと略す ）による粒状体の変形・流動解析に、新たに楕円形要素を導入するための基礎的な検討を行なうものである。本報では、楕円形要素の接触判定法の基礎式を誘導するとともに、簡単な数値解析例を報告する。

2．接触判定法の概要

次のような２次曲線式 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ で表わされる２つの楕円形要素が接触している場合、２次曲線束 $f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)=0$ は２要素の交点を通るすべての２次曲線を表わす。そこで、この２次曲線束が２直線となる定数λの値を求め、２直線が２要素の共通交点を通るときを接触しているものと判定するのである。以下に、その概要を述べる。

1）　２次曲線の分類

平面上の直交座標系において、次の２次方程式

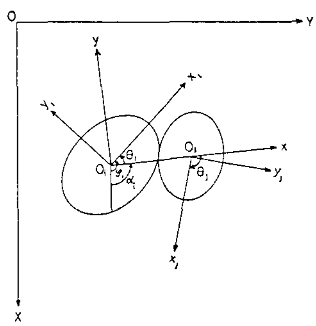
$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

が表わす図形は２次曲線といわれており、以下の３式

$$D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \quad (2), \qquad D_0=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\sigma=a+b \qquad (4)$$

により、一般に表－１のように分類することができる。



図－１　全体座標系と局所座標系

2）　基礎式の誘導

図－１に示すような、２つの楕円形要素 i ，j 間の接触について考える。まず要素 i ，j を、各要素の重心 O_i，O_j を原点とする x_i-y_i，x_j-y_j 局所座標系によって表わす。次に x－y 局所座標系を、要素 i の重心 O_i を原点とし、x 軸が要素 j の重心 O_j を通るように設定する。そしてこの x 軸が、X－Y 全体座標系の X 軸となす角を α_i，要素 i の局所座標系の x_i 軸となす角を θ_i，要素 j の局所座標系の x_j 軸となす角を θ_j とする。また、重心間距離 $\overline{O_iO_j}=d$ とおく。

さて、x－y 局所座標系を用いて要素 i ，j を表わしたものを次式に示す。

$$A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2=D_i \quad (5), \qquad A_j(x-d)^2+2B_j(x-d)y+C_jy^2=D_j \quad (6)$$

ここに、
$$\left.\begin{aligned} &A_n=b_n^2\cos^2\theta_n+a_n^2\sin^2\theta_n, \quad B_n=(b_n^2-a_n^2)\cos\theta_n\sin\theta_n, \\ &C_n=b_n^2\sin^2\theta_n+a_n^2\cos^2\theta_n, \quad D_n=a_n^2b_n^2 \qquad (n=i,j) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

要素 i ，j の交点を求めるため、式（５），（６）に任意定数λを用いて２次曲線束を作る。

$$A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2-D_i+\lambda\{A_j(x-d)^2+2B_j(x-d)y+C_jy^2-D_j\}=0 \qquad (8)$$

そして、式（８）を２次曲線の一般形である式（１）の形式に変換する。

$$\left.\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \\ &\text{ここに、}\ a=\lambda A_j+A_i,\ h=\lambda B_j+B_i,\ b=\lambda C_j+C_i,\ g=-\lambda A_jd, \\ &f=-\lambda B_jd,\ c=\lambda A_jd^2-\lambda D_j-D_i \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

式（９）が２つの１次式の積に因数分解する、つまり２直線となるには、式（２）において、$D(\lambda)=0$ を

満足するλを求めてやればよい。式（9）を、独立変数としてのλの式に整理して次の簡略式を得る。

$$D(\lambda)=t_1\lambda^3+t_2\lambda^2+t_3\lambda+t_4 \qquad (10)$$

上式より求めた実根のλの1つを式（9）に代入し、式（9）を因数分解して得られる2直線と、式（5），（6）との共通交点の存在について調べる。

以上が、楕円形要素の接触判定法の概要である。

3．数値解析例

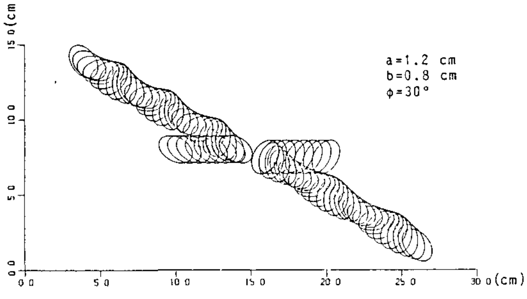
まず、1要素の落下・反発運動を、図－2から図－4に示す。図－2，3は要素の長短軸比を変え、さらに（a），（b）は底壁面の摩擦係数が異なる場合を示したものである。これらより、楕円形要素の落下・反発運動において示す挙動は、長短軸比および摩擦係数の材料定数の組合せによって異なることがわかる。また、要素形状の異なる3つの要素に水平方向の初速度を与えた場合の、落下・反発運動を図－4に示す。この図より、接触点（頂点）の連続～不連続性、および接触点（頂点）と要素の重心との位置関係の相違によって運動特性が支配され、楕円形要素が円形要素と長方形要素の中間的な挙動を示すことがわかる。

次に、楕円形2要素の接触・反発運動の解析例を図－5に示す。この例でも相当煩雑な計算を要するので、本手法によるマスモデルへの適用性の検討が、今後の課題である。

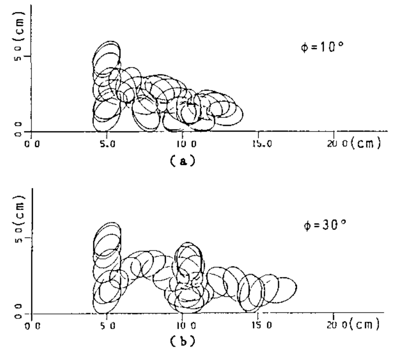
表－1　2次曲線の分類

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$D_0 \neq 0$</td><td colspan="3">$D_0 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$D \neq 0$</td><td rowspan="2">$D_0 < 0$</td><td colspan="2">$D_0 > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">放　物　線</td></tr>
<tr><td>$\sigma D < 0$</td><td>$\sigma D > 0$</td></tr>
<tr><td>双曲線</td><td>楕　円</td><td>空集合
2本の虚直線
（点楕円）</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$D = 0$</td><td rowspan="3">相交わる
2直線</td><td colspan="2" rowspan="3">1　点
（相交わる2虚直線
または点楕円）</td><td colspan="2">g^2-ac，f^2-bc のうち、少なくとも1つが</td><td rowspan="2">$g^2-ac=f^2-bc$
$=0$</td></tr>
<tr><td>正</td><td>負</td></tr>
<tr><td>平行2直線</td><td>空集合
（虚平行直線）</td><td>1直線
（2直線一致）</td></tr>
</table>

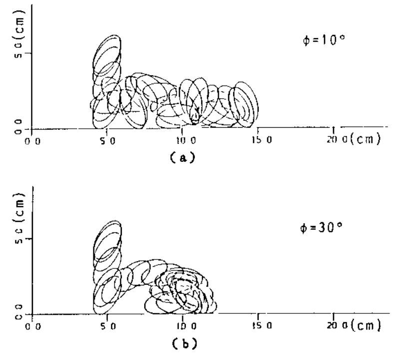
※　ここに、g^2-ac，f^2-bc は同符号であるか、または0である。



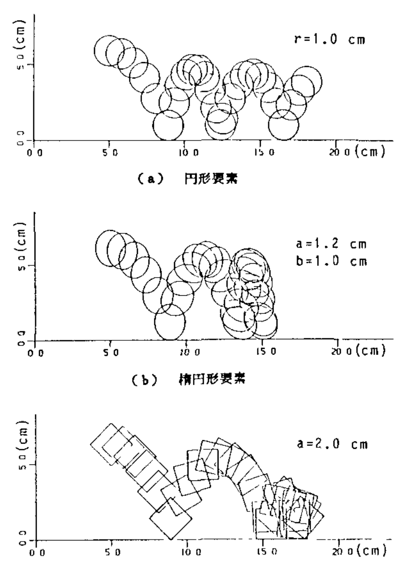
図－5　2要素の接触・反発



図－2　要素の落下・反発（a/b＝1.5）



図－3　要素の落下・反発（a/b＝2.0）



図－4　3種類の要素の落下・反発