

離散確率過程モデルに基づいた流砂濃度に関する一考察

東洋建設株式会社 〇正員 内藤 力
鳥取大学工学部 宗像 豊哲
鳥取大学工学部 正員 道上 正規

1. はじめに 流砂は、その運動形式によって掃流砂と浮遊砂に分けられる。従来これらの運動は、別々に取り扱われてその相互関係はあまり考慮されていない。したがって、それぞれの解析が正しく行われても、それらをたしたものが全流砂量に対応するかという問題が残る。そこで、掃流砂と浮遊砂を同時に扱えば上記の問題は、解決すると考えられる。本研究は、掃流砂と浮遊砂を同時に扱う離散確率過程モデルを提案し、流砂の濃度分布を求める。定常問題に対しては砂粒子の定常存在確率の解析解を求め、これを用いて考察する。

2. モデル及び基礎方程式 粒子運動を以下のようにモデル化する。河床と垂直な方向に y 軸をとり、 y (≥ 0) 座標を幅 Δy の区間に分け各格子点を $y_0, y_1, y_2, \dots$ とする。最も簡単な場合として y_n にいる粒子は、 Δt 時間後に最近接格子点 $y_{n\pm 1}$ 及び y_n にしか存在しない場合を説明する (図-1 参照)。 y_n から y_{n+i} ($i=0, \pm 1$) への遷移確率を f_i とする。ただし f_i は、 $\sum_{i=-1}^1 f_i = 1$ を満足する。砂粒子は、河床より下に落ちないという境界条件を導入する。 y_0 (河床) から y_{-1} への遷移は許されないから、 y_0 から y_0 への遷移確率は、 f_0 のかわりに $(f_0 + f_{-1})$ を用いる。時刻 t において砂粒子が位置 y_n にいる確率を $P(n, t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(n, t + \Delta t) &= f_{-1}P(n+1, t) + f_1P(n-1, t) + f_0P(n, t) \quad (n \geq 1) \\ P(0, t + \Delta t) &= f_{-1}P(n+1, t) + (f_0 + f_{-1})P(0, t) \quad (n = 0) \end{aligned} \quad (1)$$

同様に、一般的な場合として y_n にいる粒子は、 Δt 時間後に y_{n+i} ($i=0, 1, \dots, M$) に存在するとし y_n から y_{n+i} への遷移確率を f_i とすると、 $\sum_{i=-M}^M f_i = 1$ が成り立ち次式のような差分方程式を得る。(Mステップモデル)

$$\begin{aligned} P(n, t + \Delta t) &= \sum_{i=-M}^M f_i P(n-i, t) \quad (n \geq M) \\ P(n, t + \Delta t) &= \sum_{i=-M}^n f_i P(n-i, t) \quad (M > n > 0) \\ P(0, t + \Delta t) &= \sum_{i=0}^M f_i \sum_{n=0}^i P(n, t) \quad (n = 0) \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式が、本モデルの基礎方程式である。

3. 遷移確率 f_i について 掃流砂と浮遊砂を同時に扱う確率過程モデルとして吉川・石川の連続モデルがある。彼等のモデルは、次式で表わされる。

$$P(y, t + \Delta t) = \pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(y - \eta, t) g(\eta, \Delta t) d\eta \right] \quad (3)$$

ここに $g(\eta, \Delta t)$ は Δt 時間に、砂粒子が η だけ移動する確率である。 $\pi[\cdot]$ は、密度関数の負の部分を零に引き寄せる作用子で任意の密度関数 $a(\xi)$ に対して次式が成り立つ。(図-2)

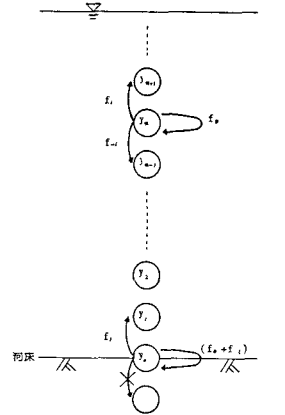


図-1 1-ステップモデルとその遷移確率

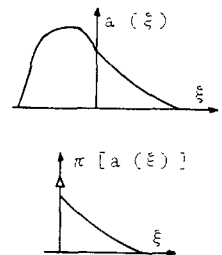


図-2 作用子 $\pi[\cdot]$ の説明図

$$\pi[a(\xi)] = \begin{cases} \delta(\xi) \int_{-\infty}^0 a(\xi) d\xi + a(\xi) & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \quad (4)$$

彼等は、(3) 式の $g(\eta, \Delta t)$ が LAPLACE 分布の場合について計算を行っている。そこで、本モデルを彼等のモデルと比較するために遷移確率 f_i を $g(\eta, \Delta t)$ から与えることとして、図-3 に示すようにして f_i を求めた。両端の斜線部の負側は負の遷移確率の最大のものへ、正側は正の遷移確率の最大のものへ加えることにした。

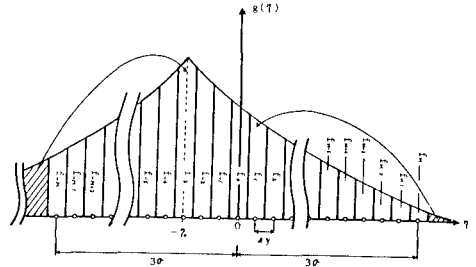


図-3 遷移確率 f_i ($i=1 \sim M$)

4. 母関数と理論式誘導方法

① 母関数を定義: $F(z, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P(n, t) z^n$ (5)

[ただし $F(z, t)$ は、 $|z| \leq 1$ で正則; $F(z=1, t)=1$]

② (2) 式の両辺に z^n をかけ $\sum_{n=0}^{\infty}$ をとり変形。 $F(z, t+\Delta t)$

を $F(z, t)$ で表す。

③ 定常状態を考える。 $[F_{st}(z) \equiv F(z, t \rightarrow \infty), P_{st}(n) \equiv P(n, t \rightarrow \infty)]$ とする。]

④ 得られた $F_{st}(z)$ は、留数定理より次式となる。

$$F_{st}(z) \rightarrow P_{st}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_{st}(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{j=1}^M a_j \left(\frac{1}{b_j} \right)^{n+1} \quad (6)$$

a_j, b_j は、遷移確率 f_i の関数である。(6) 式は、定常濃度分布を M 個の指数分布の和で表している。

5. 計算結果及び考察 遷移確率として吉川・石川と同じ LAPLACE 分布を用いた場合、吉川・石川モデルとほぼ同じ結果が得られた(図-4, 5)。遷移確率の分布形を変えた場合に定常分布がどう変わるかを調べるために、離散モデルに遷移確率として GAUSS 分布を用いて LAPLACE 分布の場合と比較した結果を図-6 に示す。本理論の方が、河床付近での濃度は大きく河床から離れるにしたがって吉川・石川の結果よりも急に濃度が小さくなっており、GAUSS 形遷移確率の性質を表している。別の実験報告の結果⁴⁾(図-7)を見ると、我々の GAUSS モデルによる結果に非常によく似た濃度分布を与える場合もあり、このとき吉川・石川による LAPLACE 分布は、実験結果の再現性が悪い。この点については、さらに検討を加えることは重要だと思われる。

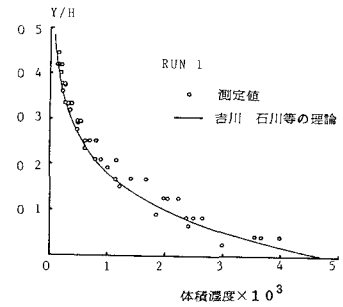


図-4 吉川・石川の結果

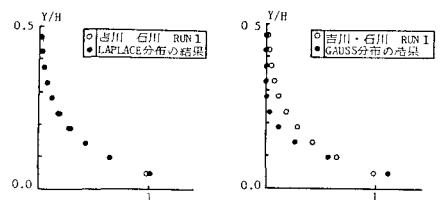


図-5 吉川・石川モデルと離散モデルとの比較

図-6 LAPLACE 分布と GAUSS 分布との比較

6. おわりに 本研究では、粒子の運動機構を離散確率過程モデルで表したが、濃度分布を計算する際のパラメーターと水理量との関係に関しては、吉川・石川の理論をそのまま用いており今後検討を要する。

参考文献 1) 吉川, 石川: 土木学会論文集第 269 号(1978). 2) N.G.Van Kampen: Stochastic in Physics and Chemistry Processes (1983). 3) 福原 満洲雄 訳: スミルノフ高等数学教程⑥(1958). 4) Vanoni, V.A. and Brooks, N.H.: Calif. Inst. of Tech., Pasadena, Calif., Report, No.E68, pp.76 ~ 86, (1975).

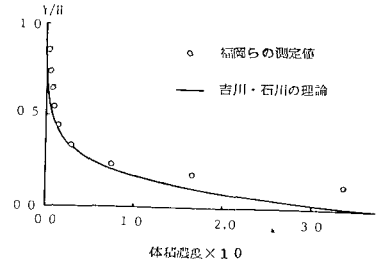


図-7 福岡らのデータと吉川・石川モデルとの比較