

キネマティック モデルによる洪水流の差分解法

広島大学工学部 正 員 常松 芳昭
 広島県 〇正 員 大和 伸明

1. まえがき

洪水流の実用的な解析モデルの一つにキネマティック・モデルがあるが、これにはその本質的な特性により現実に起こる洪水波高の減衰を説明できない欠点がある。本文では、キネマティック・モデルの差分スキームにおいて、重み係数を導入することによって発生する打ち切り誤差の影響を考察し、また差分スキームの安定条件より数値シミュレーションを行なう際の計算格子間隔の制約条件を明示し、これに基づく洪水追跡計算の結果について報告する。

2 キネマティック・モデルとその差分表示式

水位～流量関係が一価であり波速を一定と仮定したキネマティック・モデルは水路の横からの流入流出量がないとき、次式のようなものである。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (C: \text{波速}) \quad \dots (1)$$

式(1)を図-1のような格子図を用いて差分表示すると

$$\frac{X(Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^n) + (1-X)(Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n)}{\Delta t} + C \cdot \frac{Y(Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}) + (1-Y)(Q_{j+1}^n - Q_j^n)}{\Delta x} = 0 \quad \dots (2)$$

である。X, Yはそれぞれ時間差分と空間差分の重み係数であり、この重み係数X, Yは次式で示すように河道の物理学的、水理学的な特性と関係があることが知られている。

$$X = 1/2 - 1/\Delta x \{ Q_0/2 C \Delta x + C \Delta t (1/2 - Y) \} \quad \dots (3)$$

式(2)において、各差分項をTaylor級数に展開し、式(1)と式(2)の誤差Rを求めると

$$R = \left\{ \left[(X - 1/2) + C \Delta t / \Delta x (1/2 - Y) \right] \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right| \cdot C \cdot \Delta x + O(\Delta x^2) \right\} \quad \dots (4)$$

である。式(4)で表わされる打ち切り誤差は、本来減衰することのないキネマティック・モデルの波高に人工的減衰をもたらす。つぎに、差分式(2)の安定性の条件は安定性解析によって求められている²⁾。しかし、同様の条件は以下のような手順によって導くこともできる。すなわち、式(2)を整理すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} Q_{j+1}^{n+1} &= C_0 Q_j^n + C_1 Q_j^{n+1} + C_2 Q_{j+1}^n \\ C_0 &= \frac{C(1-Y)\Delta t + X\Delta x}{CY\Delta t + (1-X)\Delta x}, \quad C_1 = \frac{CY\Delta t - X\Delta x}{CY\Delta t + (1-X)\Delta x}, \quad C_2 = \frac{C(Y-1)\Delta t + (1-X)\Delta x}{CY\Delta t + (1-X)\Delta x} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

いま、式(5)においてQの代わりに相対流量 $\bar{Q} = Q - Q_0$ (Q_0 : 定常流量)を考えると、 n 計算ステップにおいては $\bar{Q}_j^n = \bar{Q}_{j+1}^n = 0$ であるから $\bar{Q}_{j+1}^{n+1} = C_1 \bar{Q}_j^{n+1}$ であり、また、 $\bar{Q}_{j+1}^{n+1} \geq 0$, $\bar{Q}_j^{n+1} > 0$ より $C_1 \geq 0$ である。一方、最終計算ステップにおいては、 $\bar{Q}_j^n = \bar{Q}_{j+1}^n = 0$ であるから $\bar{Q}_{j+1}^{n+1} = C_2 \bar{Q}_{j+1}^n$ であり、また、 $\bar{Q}_{j+1}^{n+1} \geq 0$, $\bar{Q}_{j+1}^n > 0$ より $C_2 \geq 0$ である。よって、 $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ より次のような安定性の条件式が得られる。

$$X/Y \leq C(\Delta t/\Delta x) \leq (1-X)/(1-Y) \quad \dots (6)$$

3 計算格子間隔の制約条件

式(4)の誤差Rが Δx に関して1次であるような次式を考える。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - B \cdot C \cdot \Delta x \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \quad B = -[(X - 1/2) + C \Delta t / \Delta x (1/2 - Y)] \quad \dots (7)$$

式(7)は、移流拡散方程式であり、Bは拡散係数であるから、洪水波が減衰するためには $B > 0$ でなければならぬ。これより次の条件式が得られる。

$$(1/2 - Y)\Delta t < (1/2 - X)\Delta x/C \quad \dots (8)$$

式(3), (6), (8)より計算格子間隔 Δt , Δx の制約条件を整理すると, 結局, 次のようになる。

$$\Delta x / C - Q_0 / C b S_b < \Delta t < \Delta x / C + Q_0 / C b S_b \quad \dots (9)$$

$$\Delta t > Q_0 / C b S_b, \Delta x > Q_0 / C b S_b$$

4. 洪水追跡計算例

計算に用いた洪水波とモデル水路の諸元は表-1に示すとおりである。モデル水路における洪水波を特性曲線法を用いて追跡し, 得られた結果を比較の基準とする。適合性の指標として次のような誤差の百分率を用いた。

$$E_a = 100 \times (Q - Q_c) / Q_c \quad (\%) \quad \dots (10)$$

ここに, Q と Q_c はそれぞれ時刻 t におけるキネマティック・モデルと特性曲線法による計算流量である。図-2は, 洪水時の流量は初期流入流量 $150 \text{ m}^3/\text{s}$ からピーク流入流量 $600 \text{ m}^3/\text{s}$ まで変動することを考慮して, 式(9)の制約条件を図示したものである。図中の英字記号は, 実際の計算に用いた Δt と Δx の組み合わせを表わしている。一例として, ケースAの計算結果を流量ハイドログラフで示したものが図-3である。また, その誤差 E_a を図-4に示している。図-4から明らかなように, 誤差は洪水の増水期では正, 減水期においては負となっている。また, 誤差は洪水波の増水期の中間付近で大きくなっているが, 特に重要な洪水波頂付近では誤差はきわめて小さいことがわかる。つぎに, 図-5, 6はそれぞれ Δt と Δx を一定とした場合の誤差 E_a の最大値をプロットしたものである。これより, 同じ計算時間間隔を用いれば計算区間間隔は小さいほど, また, 計算区間間隔が同じであれば計算時間間隔が大きいほど精度は向上する傾向にあることがわかる。

5 あとがき

以上, キネマティック・モデルによる洪水流の数値解法について差分スキームの観点から一考察を試みたが, 今後は従来提唱されている種々の洪水流解析モデルの相互関係を明らかにし, 洪水流の計算技術の統合化を進めていきたい。

1) 常松・大和; マスキングム式のパラメーターについて,

第36回 土木学会中四支部講演概要集, 1984.

2) Alan A. Smith;
A Generalized
Approach to
Kinematic Flood
Routing, pp.71-89,
J. Hydraul., Vol. 145,
1980.

図-5 最大誤差 ($\Delta t = \text{一定}$)

表-1 洪水波とモデル水路の諸元

ピーク流量到達時間 T_p	4 時 間
総経路長 L	12 時 間
ピーク流入流量 Q_p	$600 \text{ m}^3/\text{s}$
初期流入流量 Q_0	$150 \text{ m}^3/\text{s}$
基本増水期	$Q = 150 - \frac{2 \times 450}{T_p^3} \cdot (T - 3/2 T_p) \cdot T^2$
基本減水期	$Q = 150 + \frac{450}{(T - T_p)^3} \cdot (T + T_p)^2 \cdot (T - T_p)^2$
水路条件	長方形断面一様水路 水面幅 100 m 粗度係数 0.03 水路床勾配 1/1000

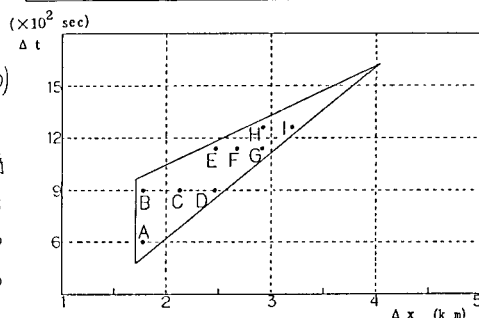


図-2 Δt , Δx の制約条件

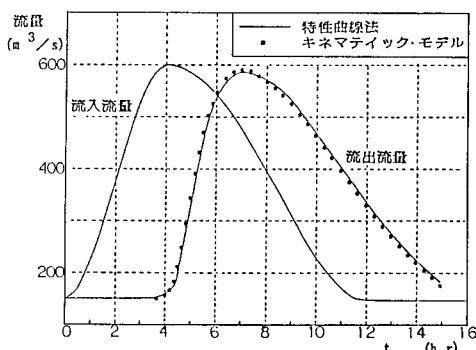


図-3 流量ハイドログラフ (ケースA)

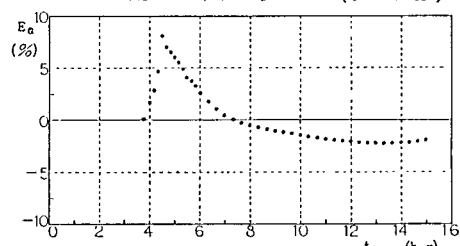


図-4 誤差の変動 (ケースA)

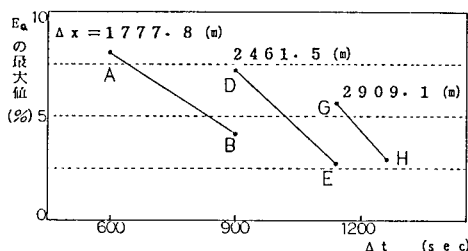


図-6 最大誤差 ($\Delta x = \text{一定}$)