

電信型拡散方程式に関する基礎的研究

岡山大学工学部 学生員 ○上森 康史

岡山大学工学部 正 員 河原 長美

1. はじめに

拡散現象の解析において広く用いられているFick型拡散方程式は、無限大の拡散速度を有する部分を許容しているという点で、実現象と大きく矛盾している。この矛盾に着目して、すべての成分が有限の拡散速度を有する電信型拡散方程式がMonin¹⁾や Goldsein²⁾らによって誘導されているが、その解の特徴については、十分検討されていない。そこで、本研究は、Fick型拡散方程式と比較することにより電信型拡散方程式の特徴を明らかにすることを目的として行ったものである。

2. 基礎式と解析解

電信型拡散方程式は、Fick型の拡散方程式と同様 random walk に基づく階差方程式の極限操作によっても求めることができる²⁾。Fick型になるか電信型になるかの相違点は、random walk において、ある時点において以前の進行方向を持続するか変更するかの確率か、それまでの進行方向に無関係にどちらも1/2の確率であるとするか、履歴が関与して、1-CとCの確率であるとするかの相違により生じ、前者は、Fick型に、後者は、電信型になる。

移流を考慮しない電信型1次元拡散モデルの基礎式は、 $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{A}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) = \nu^2 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)$ である。Cは、運動方向の相関係数であり、Aは、 $A = \frac{L_0}{\nu} \frac{\nu}{1-C}$ と定義される。また、 ν は変動流速の2乗の平均の平方根である。今、Lagrangeの相関が、 $R_L(\tau) = e^{-\tau/\tau_0}$ で表わされたとすると、 $C = e^{-\tau/\tau_0}$ となるので、 $A = L_0$ となりAはLagrangeの時間スケールに一致する。

解析するに当っては、無次元化した基礎式を用いた。無次元化した基礎式は、 $\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}$ となり、A、 ν にかかわらず、同じ形になる。ここに、 $t = \tau_0 T$, $x = \nu L_0 X$ である。上で述べた基礎式は、拡散だけを考えたものであるか、移流を考慮する場合については、 $X = x + \int_0^t u dt$ により変数変換を行った。ここで、流速は、河川の感潮部を想定して、 $u = U_0 + U_1 \sin \omega t$ とした。ここに、 U_0 は、河川の固有流速、 U_1 は、潮汐による変動流速の最大値、 ω は、角速度とする。

次に、電信型1次元拡散方程式の点源の無次元化した解析解は、 $T=0$ で $M=2$ 投入したとすると次のようになる²⁾。

$$C = \frac{e^{-Y^2}}{2} \left[I_0(Y) + \frac{1}{Y} I_1(Y) \right], \quad Y = \frac{(T^2 - X^2)^{1/2}}{2}, \quad I_0(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m Y^{2m}}{(m!)^2}, \quad I_1(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m Y^{2m+1}}{m!(m+1)!}$$

$$X = T \text{ に } e^{-Y^2}$$

次に、点源の解を基にして図-1に示すような線源の場合の解を誘導すると、以下のようになる。なお、 $X=0$ について対称であるので、 $X \geq 0$ の場合のみを考える。 $X_0 < T$ の場合

$$0 \leq X < -X_0 + T \text{ の領域で}$$

$$C = \int_{-X_0}^{X_0} \frac{C_0}{4} e^{-Y^2} \left[I_0(Y) + \frac{1}{Y} I_1(Y) \right] d\xi, \quad Y = \frac{\{T^2 - (X - \xi)^2\}^{1/2}}{2}$$

$$-X_0 + T \leq X \leq X_0 + T \text{ の領域で}$$

$$C = \int_{X-T}^{X_0} \frac{C_0}{4} e^{-Y^2} \left[I_0(Y) + \frac{1}{Y} I_1(Y) \right] d\xi + C_0 e^{-Y^2}$$

$$0 < T \leq X_0 \text{ の場合}$$

$$0 \leq X < X_0 - T \text{ の領域で}$$

$$C = \int_{X-T}^{X_0+T} \frac{C_0}{4} e^{-Y^2} \left[I_0(Y) + \frac{1}{Y} I_1(Y) \right] d\xi + 2 C_0 e^{-Y^2}$$

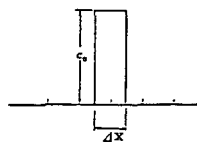


図-1 初期濃度分布

$X_0 - T \leq X \leq X_0 + T$ の領域で

$$C = \int_{X-T}^{X+T} \frac{C_0}{4} e^{-\frac{Y^2}{4}} \left[I_0(Y) + \frac{T}{2} \frac{I_1(Y)}{Y} \right] dY + C_0 e^{-\frac{Y^2}{4}}$$

ここで、 $X_0 = \Delta X/2$ である。

3. 結果と考察

拡散のみの場合の Fick 型と電信型の解析解を図-2に示す。これより、Fick型では、拡散物質が投入された直後より、濃度分布が正規分布の形となることかわかる。これに対して、電信型では、初期濃度分布の形を比較的とどめたまま、全体的な濃度低下が起こり、 $T=5.0$ 程度で正規分布に近い形の濃度分布となる。また、ピーク濃度に着目すると、Fick型では、 $T=1.0 \sim 5.0$ においてピーク濃度の大きな低下が起こる。一方電信型においては、 $T=5.0 \sim 10.0$ においてFick型の $T=1.0 \sim 5.0$ で起こった濃度低下よりも多少大きい同程度の濃度低下が起こっている。以上のことより、電信型においては、初期に拡散過程の途に起因すると思われるピーク濃度低下の時間的なずれがFick型との間にあると言える。また、ピーク濃度の差は、 $T=200$ 程度まで存在し、それ以降は、Fick型と電信型の解析解はほとんど一致する。

移流を含む場合のFick型と電信型の解析解、の場合について図-3に示す。なお、 (v, t_0) を変えて他の場合についても検討している。これより、拡散のみの場合と同様 $T=200$ 程度でFick型と電信型の解析解は一致する。また、ピーク濃度の差に着目すると、 $T=10$ で12~16%程度Fick型に比べて電信型のほうが高い濃度を与えるという結果が得られた。このことより、短い時間間隔で投入量より、汚濁物が投入された場合に、Fick型では、大きな誤差を含むのではないかと考えられる。

4. まとめ

本研究で得られた結果より、電信型拡散方程式の特徴をまとめると以下ようになる。

I 電信型拡散方程式は、Fick型拡散方程式に比べて、拡散の初期において高いピーク濃度を与える。

II 電信型拡散方程式とFick型拡散方程式の濃度分布は、移流の有無ならびに v, t_0 の値によらず $t = 200 t_0$ 程度で一致する。

以上、主要な結論を述べたが、実際の流れの場に適用する場合を考えると、実際の流れの場においては、異った時間スケールを持つ種々の流速変動が存在するため、どのような時間スケールを採用するのが適切であるかという問題があり、この点の検討が今後必要とされる。

参考文献 1) Monin, A. S: SMOKE PROPAGATION IN THE SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE, Advances in Geophy. Vol. 6, p. 1259.
2) Goldstein, S.: ON DIFFUSION BY DISCONTINUOUS MOVEMENTS, Quart Journ. Mech. and Applied Math., Vol. 4, 1951.

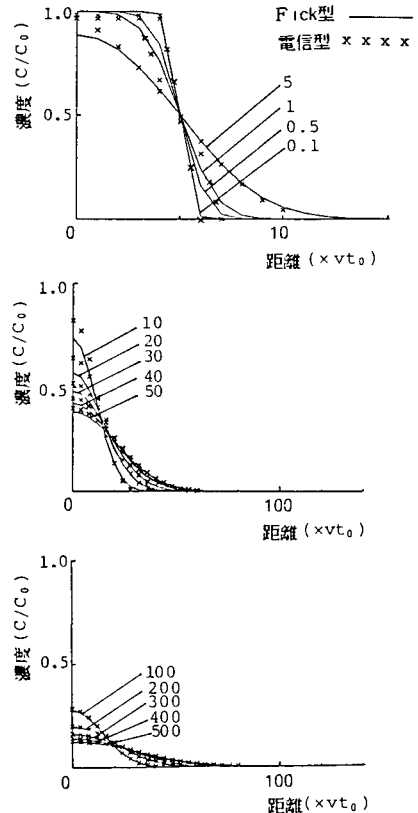


図-2 濃度分布図

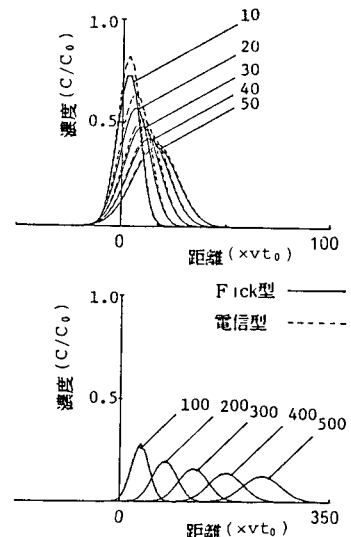


図-3 濃度分布図