

せん断型線形多自由度系の同定問題の周波数領域における解析法に関する一考察

和歌山高専 正会員 ○辻原 浩
徳島大学工学部 正会員 沢田 竜
建設技術研究所 竹内 義幸

1. まえがき 地震時の構造物の応答記録を用いて構造物の振動特性を再評価する、いわゆる、構造物の同定が近年多数試みられている。本研究では、せん断型線形多自由度系を対象として、この同定問題を周波数領域で定式化し、せん断型システムのもつ特徴を利用してこれを効率よく解く方法と導入するとともに、同定の際の評価基準およびパラメータの推定値の一貫性について検討したのでここに報告する。

2. 同定問題の定式化 Fig. 1に示すようなせん断型線形多自由度系において、基礎の変位を $s(t)$ 、質点の変位(絶対変位)を $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ とすると、系の運動方程式は次式で与えられる。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

ただし、 M, C, K はそれぞれ、質量、減衰係数および剛性マトリクスであり、 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ は速度および加速度ベクトルである。また $f(t)$ は、 $f(t) = \{c_1\dot{s}(t) + k_1s(t), 0, \dots, 0\}^T$ で表される外力項ベクトルである。式(1)の運動方程式は各種の数値積分法によって解くことができるが、本研究では、応答と周波数領域で表すため複素応答解析法を用いる。式(1)の両辺をフーリエ変換し、円振動数 ω の入力に対する系の周波数応答 $X(\omega)$ を求めると次式のようになる。

$$X(\omega) = A^{-1}F(\omega) \quad (2) \quad \text{ここに、} A = \{-\omega^2 M + i\omega C + K\} \text{であり、} F(\omega) = \{i\omega c_1 + k_1, 0, \dots, 0\}^T \cdot X_0(\omega) \text{である。}$$

ただし、 $X_0(\omega)$ は基礎の変位 $s(t)$ のフーリエ変換である。式(2)はせん断型線形多自由度系の同定問題を周波数領域で考える際の基本式であるが、同定問題のように多数の反復計算を必要とする場合には、逆行列 A^{-1} の計算に多大な演算時間を要するため実用的でない。そこで、本研究では行列 A が三項行列になることに注目して式(2)を効率よく漸化式を用いて解き、この方法を同定問題に導入した。¹⁾ いま、基礎および n 個の質点のうち任意の2つの点 l および u での観測記録が得られているものとする。これら2つの記録のフーリエ変換を $\hat{X}_l(\omega)$ および $\hat{X}_u(\omega)$ とすると、観測点 u の l に対する周波数応答関数 $\hat{H}(\omega)$ は次のように表される。

$$\hat{H}(\omega) = \hat{X}_u(\omega) / \hat{X}_l(\omega) \quad (3) \quad \text{一方、同じ箇所での周波数応答関数のパラメータ群} \alpha \text{の関数として計算により次式のように求められる。}$$

$H(\omega; \alpha) = X_u(\omega; \alpha) / X_l(\omega; \alpha) \quad (4) \quad \text{したがって、同定問題はこれら2つの周波数応答関数の誤差が最小となるようにパラメータ(ばね定数} k_r \text{および減衰係数} c_r) \text{の値を決定することに帰着する。なお、質点の質量} m_r \text{については既知量として扱うものとした。本研究では、上述の操作をシステムティップに行うために、次に示す2つの評価基準、すなわち、周波数応答関数の絶対値に注目した基準Aおよび実数部と虚数部に注目した基準Bを設け、反復線形計画法(SLP)を用いてパラメータの最適値を推定した。}$

$$\text{基準A : } S_A = \sum_{j=1}^N \{ |H(\omega_j; \alpha)| - |\hat{H}(\omega_j)| \}^2 \longrightarrow \min \quad (5)$$

$$\text{基準B : } S_B = \sum_{j=1}^N |H(\omega_j; \alpha) - \hat{H}(\omega_j)|^2 \longrightarrow \min \quad (6)$$

ここで、 ω_j は離散点で与えられた番目の円振動数であり、 N は振動数点の数である。

3. 数値計算例および考察 数値計算では、3自由度系モデルと8自由度系モデルを用いた。ただし、ここでは実際の観測記録を用いることはせず、任意の入力に対する質点の応答をデジタル計算機内でシミュレートし、これより周波数応答関数を求め、式(5)、式(6)の目標値 $\hat{H}(\omega_j)$ とした。したがって、このようにして求められた周波数応答関数はノイズを含まない真のものである。以後、このときに用いたパラメータの値を真値(True

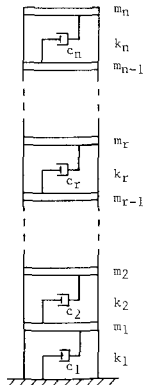


Fig. 1 n Degree of Freedom System

Value) とよぶ。なお、SLP による反復計算の回数はすべて 50 回とした。

(1) 3 自由度系モデル 以下では 次の 3 つの目標値 $\hat{H}(\omega_p)$ を想定して数値計算した結果を示す。

Case 0-1 : 基礎と質点 1 の周波数応答関数

Case 0-3 : 基礎と質点 3 の周波数応答関数

Case 1-2 : 質点 1 と質点 2 の周波数応答関数

Table 1~3 には 各振動特性値の真値、初期値 (Initial Value)、収束値 (Optimum Value) および収束値と真値の比を示した。ただし、質量は既知として各質点の質量を 1 t・s/m とした。Table 1 には Case 0-1 について

式(6)の評価基準 B により同定した結果を示す。表より、1 つの定数については 3% 以下の誤差で、減衰係数については 7% 以下の誤差で推定されているのがわかる。一方 Case 0-1 について、式(5)の評価基準 A により同定した結果、基準 B によるものと同程度の精度で推定されることがわかった。一般の振動問題では、周波数領域の振幅と位相または実数部と虚数部と同時に考慮しなければ時間領域の波形に対応しない。この例でパラメータの値がほぼ真値に収束したのは、系の単位インパルス応答関数の因果性関数であり、かつそのラプラス変換が最小位相推移関数になるため、周波数応答関数の振幅の情報のみによって系の振動特性が決定されるためであると考えられる。上述の結果より、以下の数値計算例では評価基準 A を用いることとした。Table 2 には

Case 0-3 についての同定結果を示す。表より、Case 0-1 に比べてパラメータの推定精度はかなり落ちるのがわかる。しかし、収束値による周波数応答関数が目標値とほぼ一致していたことから、この解は一つの局所解であると考えられる。また、Table 3 には Case 1-2 についての同定結果を示す。表より、 k_1 、 c_1 を除いてパラメータの値はほぼ真値に収束しているのがわかる。これらのことから、連続する 2 質点の記録を用いた場合には、それよりも上部の構造が本手法を用いることにより一意に同定されることが示唆される。この問題に対して、Udwadia らは 2 周波数応答関数の高振動数域の極限值を用いる方法によって推定されるパラメータの一意性を指摘したが、本研究では有意な情報ともつ周波数帯域を対象としている点の特徴である。

(2) 8 自由度系モデル 自由度が増加した場合の解の収束性を見るために、8 自由度系モデルについて同様の解析を行った。ただし、目標値は基礎と質点 1 の周波数応答関数の振幅とした。Table 4 には 1 つの定数および減衰係数の諸値を示すが、3 自由度系モデルの場合に比べて解の収束性が悪くなり精度が劣ること

がわかる。《参考文献》 1) 沢田ら; せん断型線形多自由度系の同定問題の周波数領域における解析法に関する一考察, 構造工学論文集, 1996 2) Udwadia ら; Uniqueness of damping and stiffness distribution in the identification of soil and structural systems, ASME, 1978

Table 1 Values of Parameter (Case 0-1)

	Spring Constants (t/m)			Damping Coefficients (t.s/m)		
	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3
True Value	60.0	50.0	40.0	1.20	1.00	0.80
Initial Value	100.0	100.0	100.0	2.00	2.00	2.00
Optimum Value	60.7	48.7	40.7	1.12	1.02	0.83
Optimum Value / True Value	1.00	0.97	1.02	0.93	1.02	1.04

Table 2 Values of Parameter (Case 0-3)

	Spring Constants (t/m)			Damping Coefficients (t.s/m)		
	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3
True Value	60.0	50.0	40.0	1.20	1.00	0.80
Initial Value	100.0	100.0	100.0	2.00	2.00	2.00
Optimum Value	55.0	55.0	44.0	0.99	1.15	0.98
Optimum Value / True Value	0.92	1.10	1.10	0.83	1.15	1.23

Table 3 Values of Parameter (Case 1-2)

	Spring Constants (t/m)			Damping Coefficients (t.s/m)		
	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3
True Value	60.0	50.0	40.0	1.20	1.00	0.80
Initial Value	100.0	100.0	100.0	2.00	2.00	2.00
Optimum Value	521.7	49.6	40.6	0.33	1.01	0.81
Optimum Value / True Value	8.70	0.99	1.02	0.28	1.01	1.01

Table 4 Values of Parameter

	Spring Constants (t/m)							
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
True Value	100.0	90.0	80.0	70.0	65.0	65.0	60.0	50.0
Initial Value	150.0	150.0	150.0	130.0	130.0	120.0	120.0	110.0
Optimum Value	104.0	107.7	74.7	62.5	62.5	57.7	59.1	53.1
Optimum Value / True Value	1.04	1.20	0.93	0.89	0.96	0.89	0.96	1.06

	Damping Coefficients (t.s/m)							
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
True Value	2.00	1.80	1.60	1.40	1.30	1.30	1.20	1.00
Initial Value	3.00	3.00	3.00	2.60	2.60	2.40	2.40	2.20
Optimum Value	1.38	2.11	1.86	1.97	2.19	1.66	1.23	0.79
Optimum Value / True Value	0.69	1.17	1.03	1.41	1.68	1.28	1.03	0.79