

確率有限要素解析法による不均一な弾性地盤上のはりの信頼性解析

鳥取大学工学部 正会員 高岡 宜善 鳥取大学工学部 正会員 白木 渡
 鳥取大学工学部 正会員 松保 重之 鳥取大学大学院 学生員 〇柏木 雅昭
 西日本建設コンサルタント(株) 米村 典之

1. まえがき 場所的に不規則に変動する反力係数 $k(x)$ を有する、不均一な弾性地盤上のはりの変形問題は、これまで主として、不規則関数論に基づいて解析されてきた¹⁾。しかし、それらの解析における数値計算は、任意の境界条件のもとで若干簡単になるものの、一般には複雑なものである。さらに、地盤の反力係数 $k(x)$ の相関性についての正確な情報の入手が必要である。だが、一般にその情報の入手は、困難である場合が多い。そこで本研究では、Vanmarckeの確率有限要素解析法²⁾により反力係数 $k(x)$ の相関性を、分散関数とその重要なパラメーターである変動スケール θ によって処理して計算の簡単化を図り、近似的ではあるが任意の境界条件のもとで不均一な弾性地盤上のはりの変形問題を解析する。さらに、それらの結果をもとに信頼性解析を行う。

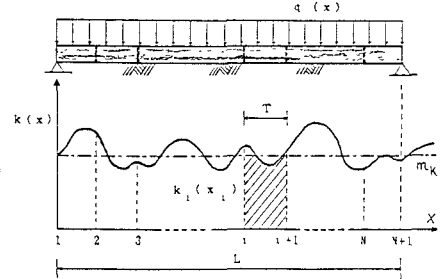


Fig. 1

2. 局所平均過程による地盤の反力係数のモデル化 地盤の反力係数 $k(x)$ は、場所的に不規則に変動し、それをFig.1に示すような空間座標 x によって表される1次元不規則関数の標本関数であると考ええる。いま、Fig.1に示すように、はりの長さ L を N 個の有限要素に等分割し、その有限要素の大きさを T とする。そして、 i 番目の節点における反力係数 $k_i(x_i)$ は、有限区間 T にわたる不規則関数 $k(x)$ の空間平均であるとし、式(1)のように定義する。ここで、反力係数 $k(x)$ が期待値 m_k 、標準偏差 σ_k を有する定常不規則関数であるとき、式(1)で定義される節点 i における反力係数 $k_i(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, N+1$)の期待値及び分散は式(2)のようになる。ここに、 $r_k(T)$ は、区間 T に依存する $k(x)$ の分散関数であり、 T の増加とともに1から0に減少する無次元の関数である。この分散関数 $r_k(T)$ の減少のパターンは、反力係数 $k(x)$ の相関関数 $\rho(\tau)$ に依存し、 $r_k(T)$ と $\rho(\tau)$ との間に式(3)の関係がある。また、この分散関数 $r_k(T)$ は、式(4)で示される変動スケール θ を用いて、式(5)のように近似される。Fig.2は、同図中に示す2,3の分散関数 $r_k(T)$ を、 T/θ に対してプロットしたものである。この図より、分散関数 $r_k(T)$ を式(5)で近似しても、大きな差がみられないことがわかる。さらに、反力係数の共分散関数 $\text{Cov}[k_i, k_j]$ は、分散関数 $r_k(T)$ を用いて式(6)で表される。

$$k_i = \frac{1}{T} \int_{i-1/2}^{i+1/2} k(x) dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= m_k \\ \text{Var}[k_i(x_i)] &= \sigma_k^2 \cdot r_k(T) \end{aligned} \quad (2)$$

$$r_k(T) = \frac{2}{T} \int_0^T (1-\tau/T) \rho(\tau) d\tau \quad (3)$$

$$\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot r_k(T) \text{ or } \theta = 2 \int_0^\infty \rho(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$\begin{aligned} r_k(T) &= 1 \quad (T \leq \theta) \\ r_k(T) &= \theta/T \quad (T > \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[k_i, k_j] &= \frac{\sigma_k^2}{2} \left\{ (x-i)^2 r_k[(x-i)T] \right. \\ &\quad \left. - 2(x-i)r_k[(x+i)T] + (x+i)^2 r_k[(x+i)T] \right\} \\ &\quad (x = |i-j|) \end{aligned} \quad (6)$$

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + k(x) W(x) = q(x) \quad (7)$$

$$EI \frac{d^4 \bar{W}(x)}{dx^4} + \bar{k}(x) \bar{W}(x) = q(x) - k(x) \bar{W}(x) + \bar{k}(x) \bar{W}(x) \quad (8)$$

$$K W_{i,j} = B_i^T K_i B_j \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_i &= (\bar{W}_{i+1} - 2\bar{W}_i + \bar{W}_{i-1})/T^2 \\ K M_{i,j} &= [K W_{i+1,j+1} - 2(K W_{i+1,j} + K W_{i,j+1}) \\ &\quad + 4K W_{i,j} + K W_{i-1,j+1} + K W_{i,j-1} - 2(K W_{i-1,j} \\ &\quad + K W_{i,j-1}) + K W_{i-2,j+1}] / T^4 \end{aligned} \quad (10)$$

3. 不均一な弾性地盤上のはりの信頼性解析 ここでは、実際に不均一な弾性地盤上のはりの基礎微分方程式を、確率有限要素解析法を用いて解き、はりのたわみおよび曲げモーメントの特性値の評価法、並びに信頼性解析について述べる。さて、Fig.1に示すような不均一な弾性地盤上の単純支持はりのたわみ $W(x)$ の微分方程式は式(7)で与えられる。ここに、 EI ははりの曲げこわさ、 $k(x)$ は地盤の反力係数であり、 $q(x)$ ははりに作用する分布荷重で、今の場合確定量とする。式(7)における $k(x) \cdot W(x)$ を、 $k(x), W(x)$ の期

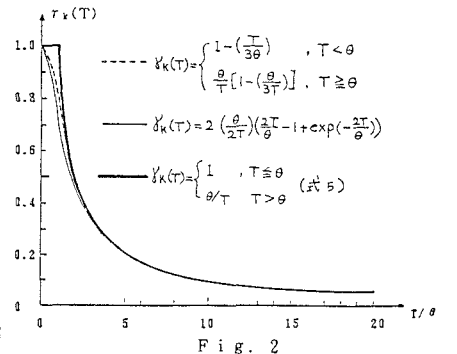


Fig. 2

待値 $\bar{w}(x)$, $\bar{k}(x)$ の近傍でテーラー展開し、2次以上の項を無視すると式(7)は、式(8)となる。式(8)をもとに、 i 番目($i=3, 4, \dots, N-1$)の節点を中心とした差分方程式を立て、それらとはりの境界条件(単純支持: $w_1=0, M_1=0$ at $i=1, i=N+1$)を差分表示したものにより、 $(N+1)$ 元連立一次方程式を立てる。それを行列表示し、変形すると、たわみの共分散 $K_{w, i, j}$ は式(9)となる。ここに、 B_i^T ($i=1, 2, \dots, N+1$) は、連立一次方程式における係数行列の逆行列の i 番目の行ベクトルであり、 K_i は、反力係数の共分散行列である。これを先に示した式(6)によって評価する。なお、たわみの期待値 $\bar{w}_i$ は、式(8)に期待値演算を施すことにより得られる。また、曲げモーメントの期待値 $\bar{M}_i$ 、共分散行列 $K_{M, i, j}$ は数値微分法により、式(10)で与えられる。

次に、不均一な弾性地盤上のはりの信頼性解析について述べる。まず、各節点 i ($i=1, 2, \dots, N+1$)での不規則な曲げモーメント M_i が、ある許容曲げモーメントレベル M_a , $-M_a$ を、それぞれ正、負方向に超過する確率の長さ密度を求める。そして、それを台形公式によりはりの全長にわたって積分し、はりの全長での超過の生じる平均回数 μ を求め、それをポアソン分布で近似する³⁾。そのときの破壊確率は、式(11)で表される。

4. 数値計算例および考察 まず、解析の対象とするはり、および地盤の諸元等は文献(4)に従い、表-1で与えられるものを用いた。そして、式(9)の反力係数の共分散行列 $K_{i, j}$ における分散関数 $r_k(T)$ に、式(3)で得られる $r_k(T)$ を代入したものをタイプ1、式(5)で得られる近似的な $r_k(T)$ を代入したものをタイプ2とする。Fig. 3は、分割数 N を $N=50, N=100, N=200$ としたときのたわみの分散を、空間座標 x に沿ってプロットしたものである。また、Fig. 4は曲げモーメントについての結果である。これらの図より、たわみの分散は、タイプ1、タイプ2とも分割数が増加してもほとんど変化していないので、分割数 $N=50$ でほぼ収束しているものと思われる。しかし、曲げモーメントの分散は、たわみの共分散行列を用いて数値微分法(式(10)参照)により求めているため、 $N=50$ (破線)と $N=100$ (実線)とでは若干差がある。また、たわみおよび曲げモーメントとも、タイプ1とタイプ2とでは大きな差が見られない。従って、たわみの共分散行列における分散関数を、式(5)でほぼ近似できるものと思われる。

次に、信頼性解析の数値計算例として、はりの長さ $L=20$ (m)とした時の各破壊確率 Q^* に対するタイプ1とタイプ2の曲げモーメントレベル M_a を示したものが、表-2である。この表からわかるように、タイプ1とタイプ2の曲げモーメントレベル M_a を比較してみると、破壊確率 Q^* が小さくなるほどその差は少しずつ大きくなっているが、それはオーダー的に大きなものではない。従って分散の評価と同様に、タイプ2による方法で計算を簡便化しても十分に信頼性を評価することができるものと思われる。

表-1

$L = 50$ (m)
$q(x) = 2000$ (N/m)
$EI = 1.0 \times 10^5$ (N・m ²)
$\bar{k}(x) = 3.48 \times 10^5$ (N/m ²)
$\sigma_k^2 = 1.1025 \times 10^{10}$ (N ² /m ⁴)
$\rho(r) = e^{-\alpha r} \cdot \cos \beta r$ $\alpha = 2.75 \text{ m}^{-1}, \beta = 3.65 \text{ m}^{-1}$

$$Q^* = 1 - \exp(-\mu) \quad (11)$$

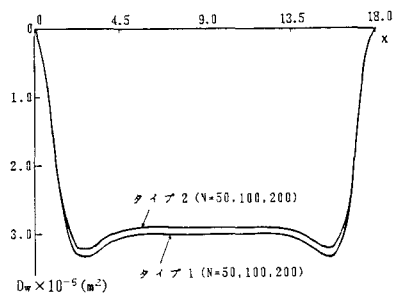


Fig. 3

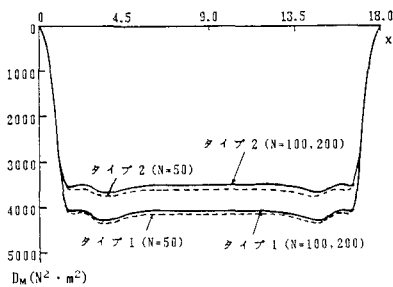


Fig. 4

表-2

破壊確率 Q^*	曲げモーメントレベル M_a (N・m)・タイプ1	曲げモーメントレベル M_a (N・m)・タイプ2
0.5	368.75	367.18
10^{-1}	432.81	426.56
10^{-2}	484.37	475.00
10^{-3}	525.00	512.50
10^{-4}	559.37	545.31

参考文献 1) В. П. Макаров К расчету балок на стохастическом основании. Строительная механика и расчет сооружений (СМРС), № 3, стр. 27-29, 1974-г. (国鉄工学研究所の資料) 2) Seix Vamarke RANDOM FIELDS THE MIT PRESS, pp. 184-233, 1983

3) 山本寛之 大阪大学大学院工学研究科修士論文 都市高速道路橋の信頼性解析に関する研究 昭和59年度 4) А. С. Лаган Исследование деформаций балок на стохастическом упругом основании методом Монте-карло (СМРС), № 3, стр. 22-26, 1972-г. (設計の信頼性向上に果たした役割の「数値」をモンテカルロ法によって求める方法について)