等号制約条件を有する非線形計画問題の一解法

愛媛大学工学部　正会員　大久保　禎二
宇部興産(株)　正会員　○和多田　康男

1．まえがき

本研究は、不等号および等号制約条件を有する非線形計画問題をＳＱＰにより解く方法を提案し、トラス構造物のコンプリメンタリエネルギ最小化問題を解いた例について述べ、本解法により能率的に解が得られることを示すものである。

2．非線形計画問題

本研究で取り扱う非線形計画問題は次のように定式化されるものとする。

$$\text{minimize}\quad F(X),\qquad X=[X_1,\cdots\cdots,X_n]^T \tag{1}$$

$$\text{subject to}\quad g_j(X)\leqq 0\quad (j=1,\ldots,m)\ ,\quad g_j(X)=0\quad (j=m+1,\ldots,m+\ell) \tag{2}$$

3．ＳＱＰによる解法

式(1),(2)の非線形計画問題を逐次二次計画法（ＳＱＰ）により解くアルゴリズムは次のようになる。①目的関数を二次形式に、制約条件を１次形式に近似し、近似二次計画問題を導入する。②勾配射影法により解き改良解をもとめる。③目的関数の二次の項の係数マトリックスをＢＦＧＳ公式により修正する。④改良解に対する新たな近似２次計画問題を作成し、①〜③の操作を解が一定値に収束するまで繰り返す。

(1) 近似二次計画問題の導入

式(1),(2)の非線形計画問題における目的関数Ｆ(Ｘ)を、ＸについてTaylor展開し ΔXの二次形式で近似するとともに、制約条件$g_j(X)$を ΔXの１次形式で近似することにより、P th stageにおける改良のための変化量 ΔXを決定する近似二次計画問題を次のように導入することができる。

$$\text{minimize}\quad Q(\Delta X)=\sum_{i=1}^{n} D_i\,\Delta X_i+0.5\,\Delta X\cdot H^P\cdot\Delta X \tag{3}$$

$$\text{subject to}\quad G_j(\Delta X)=\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\,\Delta X_i+g_j(X^P)\leqq 0\quad (j=1,\cdots\cdots\cdots,m) \tag{4}$$

$$G_j(\Delta X)=\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\,\Delta X_i+g_j(X^P)=0\quad (j=m+1,\cdots\cdot,m+\ell) \tag{5}$$

ここに、$\Delta X=[\Delta X_1,\cdots\cdots\cdots,\Delta X_n]^T$ ，$D_i=\partial F(X^P)/\partial X_i$ ，$C_{ji}=\partial g_j(X^P)/\partial X_i$
H^P：正定値係数行列でＢＦＧＳ公式により修正する。

ところで、一般の非線形計画問題では制約条件が不等式（$g_j\leqq 0$）で表わされるのに対し、上式の近似二次計画問題では等式の制約条件（$g_j=0$）を有するので、以下のようにしてすべての等号制約条件を満足するような ΔXの初期許容解（ΔX^0）を決定し、すべての等号制約条件面上でＸの改良を行うこととした。

(2) 初期許容解（ΔX^0）の決定

本研究では、ＬＰの手法を用いて、式(4),(5) の制約条件をすべて満足する ΔXの初期値を次のように決定した。まず、式(3)〜(5)の近似二次計画問題に対して、$\Delta X_i\,(i=1,\cdots\cdot\cdot,n)$を次のように定義し、

$$\Delta X_i=\Delta X_i{}'-\Delta X_i{}''\ ,\quad \Delta X_i{}'\geqq 0,\quad \Delta X_i{}''\geqq 0 \tag{6}$$

各制約条件に対して、実変数 $\Delta X_i{}'$ および $\Delta X_i{}''$ のみを変数とし、スラック変数を導入せずにシンプレックス表を作成し、次の規準にしたがってピボット要素の行ｒおよび列ｓを決定する。

<u>行ｒの決定</u>･････ $g_j>0\,(j=1,\cdots,m)$なる不等号制約条件、および$g_j\neq 0\,(j=m+1,\cdots\cdot\cdot,m+\ell)$なる等号制約条件のなかで、$g_j$の絶対値が最大の行ｒを選ぶ。すなわち

$$g_r=\max.\{g_{r1},\ g_{r2}\}\quad \text{ここに、}\ g_{r1}=\max.\{\,|g_j|\ |\ g_j\neq 0,\ j=m+1,\cdots\cdot,m+\ell\}$$

$$g_{r2}=\max.\{\,|g_j|\ |\ g_j>0,\ j=1,\cdots\cdot,m\} \tag{7}$$

<u>列ｓの決定</u>･････ g_rが正（負）の場合には$C_{ri}\,(i=1,\cdots,2n)$のうち正（負）のものに着目し、D_i/C_{ri}が最小（最大）となる列ｓを求める。すなわち

if　$g_r>0$　　　　　　　　　　　　　　　if　$g_r<0$

$$\frac{D_s}{C_{rs}}=\min.\left\{\frac{D_i}{C_{ri}}\ \Big|\ C_{ri}>0,\ i=1,\ldots,2n\right\},\quad \frac{D_s}{C_{rs}}=\max.\left\{\frac{D_i}{C_{ri}}\ \Big|\ C_{ri}<0,\ i=1,\ldots,2n\right\} \tag{8}$$

上記のピボット操作を、違反している制約条件すべてについて行なうことにより、目的関数を最大に減少あるいは最小に増加させながら、すべての制約条件を満足する ΔX^0を決定することができる。

(3) 改良のための変化量（ΔX^*）の決定

(2)で述べたピボット操作により初期許容解 ΔX^0が決定されれば、すべての等号制約条件、およびactiveな不等号制約条件で構成される超平面上のｄの方向に、式(4)の目的関数Q(ΔX) を最小とする改良幅αだ

け ΔXを改良する。すなわち、

$$\Delta X^{k+1} = \Delta X^{k} + \alpha^{k} d^{k}$$

ここに、$d^{k} = -\{I - A^{T}_{q}(A_{q}\cdot A^{T}_{q})^{-1}A_{q}\}\nabla Q^{T}$ (9)

I：単位行列

A_{q}：ΔX^{k}におけるactiveな制約条件（q個）のΔX^{k}にかかる係数

$$\alpha^{k}: \min\left\{-\frac{G_{j}(\Delta X^{k})}{\sum_{i=1}^{n} C_{ji} d_{i}},\ -\frac{\nabla Q^{T} d}{d^{T} H d}\ \middle|\ \sum_{i=1}^{n} C_{ji} d_{i} > 0,\ j \leq q\right\} \quad (10)$$

$Q(\Delta X^{k})$が減少を続け、新な制約条件面と交差した場合には、式(9)により新しい改良方向dを求めΔX^{k}の改良を続ける。このようなΔX^{k}の改良を繰り返し、$Q(\Delta X)$の最小点におけるΔX^{k}をΔX^{*}とする。

(4) ラグランジュ乗数λ_{q}の決定

ΔX^{*}が得られた時点で、activeとなる制約条件に対するラグランジュ乗数は次式により計算される。

$$\lambda_{q} = -\nabla Q(\Delta X^{*})\, A^{T}_{q}(A_{q}A^{T}_{q})^{-1} \quad (11)$$

上式で求めたλ_{q}のうちで、不等号制約条件に対するλがすべて非負であれば、ΔX^{*}はKuhn-Tucker条件を満足するので近似二次計画問題（式(3)～(5)）の最適解となる。しかし、不等号制約条件に対するλで負のものがあれば、それらの制約条件に対する要素をすべてA_{q}から取り除いて式(9)のdを求め直し、不等号制約条件に対するλがすべて非負となるまで上記の操作を繰り返す。

(5) 変数Xの改良

(3),(4)で求めたΔX^{*}を用いて、変数Xを次式により改良する。

$$X^{p+1} = X^{p} + \Delta X^{*} \quad (12)$$

(6) 二次の係数行列Hの修正

目的関数（式(3)）の正定値行列Hを、次のラグランジュ関数

$$L(X, \lambda) = F(X) + \lambda^{T} g(X) \quad (13)$$

のXに関する２次の偏微係数行列の近似とし、次のＢＦＧＳ公式を用いて修正する。

$$H^{p+1} = H^{p} - \frac{H^{p}\Delta X\,\Delta X^{T} H^{p}}{\Delta X^{T} H^{p} \Delta X} + \frac{\eta\eta^{T}}{\Delta X^{T}\eta} \quad (14)$$

ここに、$\eta = \nabla_{X} L(X^{p+1}, \lambda^{p}) - \nabla_{X} L(X^{p}, \lambda^{p})$ (15)

4．計算例

図-1のような応力—ひずみ関係を有する非線形材料からなる図-2に示す６部材トラスの各部材の軸力を、コンプリメンタリエネルギを最小化することにより求める問題は、次のような線形等号制約条件を有する非線形計画問題として定式化される。

minimize $F = \Sigma \beta_{i}(X_{i}) V_{i}$

subject to
$g_{1} = X_{2} + 0.7071X_{3} = 0$
$g_{2} = X_{1} + 0.7071X_{4} = 0$
$g_{3} = 0.7071X_{4} + X_{5} - 400000 = 0$
$g_{4} = 0.7071X_{3} + X_{6} = 0$
$g_{5} = 0.7071X_{3} + X_{5} = 0$

ここに、
X_{i}：部材 i の軸力
β_{i}：部材 i の単位体積当りのコンプリメンタリエネルギ（図-2参照）
V_{i}：部材 i の体積
g_{i}：各節点における釣合方程式

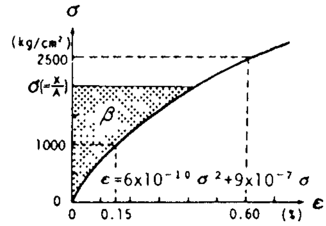

図-1 応力—ひずみ関係とコンプリメンタリエネルギβ

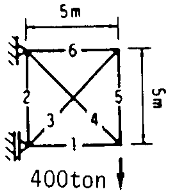

図-2 ６部材トラス(all A=100cm²)

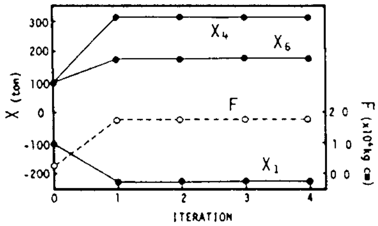

図-3 収束状況

表 1 計算結果

		初期値	収束値
部材力 (ton)	1	-100 0	-222.5
	2	100.0	177.5
	3	-100 0	251.0
	4	100 0	314.7
	5	100 0	177.5
	6	100 0	177 5
ENERGY 1) (kg·cm)		221924	1781839
ITE (回) 2)		4	

1)：コンプリメンタリエネルギ
2)：繰り返し回数

この非線形最小化問題を３．で述べた解法により解いた結果を表-1に、解の収束状況を図-3に示す。これらの図表から明らかなように、解は１回の改良で最終的な解の近傍に到達し、以後、収束判定規準（$F^{p+1}/F^{p} < 0.0001$）を満足するために３回の反復計算を要しているが、きわめて能率的に収束している。なお、ここでは６部材トラスの例を示したが、30部材程度の不静定トラスについても同様に良好な収束性を示しており、本研究で提案している方法により、等号制約条件を有する非線形計画問題が、能率的に解き得ることが明らかとなった。

参考文献 1)大久保・吉田・古川：構造設計におけるOptimizer Subroutine Libraryの作成，pp.87-98,1984
2)今野・山下：非線形計画法，日科技連,1978.