# 双対法によるはり構造の最適設計法に関する考察

愛媛大学工学部　正　員　　大久保　禎二
愛媛大学大学院　学生員　○中　嶋　　毅

## 1　まえがき

著者らは、これまでに、双対法によりトラス構造物の各部材の最適断面積及び使用材種を決定する方法に関する研究を行ない、その有効性を明らかにしてきたが、[1]本研究では、この方法をはり構造物の最適設計問題に適用する場合についての基礎的考察として、はりの桁高を一定とした場合における、各はり要素の最適な断面積および使用材種を決定する最適設計問題について種々検討を行なった結果について述べるものである。

## 2　双対法によるはり構造の最適設計法

はり構造物の設計問題において、はり要素の断面寸法および材種選択に関する設計変数として、それぞれ各要素の断面積Aおよび使用材種Mを用いることとし、はり構造物の製作費あるいは重量などの目的関数Wが、各はり要素の断面積Aに関する一次の項の和として次式のごとく表わされるものとする。

$$W(A,M)=\Sigma\rho_i(M_i)\cdot\ell_i\cdot A_i=\Sigma W_i(M_i)\cdot A_i \qquad (1)$$

ここに、$\rho_i$および$\ell_i$は、それぞれはり要素 i に関する目的関数の特性を表わす定数および要素長である。

また、制約条件$g$として、各はり要素の縁応力度$\sigma$および着目点のたわみ$\delta$に関する条件を考慮するものとすると、制約条件式は各はり要素の断面２次モーメントＩと使用材種Mの関数として次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}g_{\sigma j}(I,M)&=|\sigma_a(M_j,I_j)|-|\sigma_j(I)|\geq0\\ g_{\delta k}(I,M)&=|\delta_{ak}|-|\delta_k(I)|\geq0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ところで、双対法によりトラス構造物の最適なAおよびMを決定する場合には、文献[1]で述べられているように、目的関数Wを部材断面積Aの逆変数Ｚ＝１／Aで表わすとともに、制約条件$g$をＺおよびMの１次式で近似することにより、設計問題のラグランジュ関数を最小にするＺあるいはAの値が関数式で与えられ、設計法を極めて単純化することができる。そこで、はり構造の最適設計問題においても、はり要素の断面積Aの逆数Ｚ＝１／AおよびMを設計変数とするように、式(2)の制約条件をAおよびMで表現することとする。

いま、図-1に示すような長方形、Ｉ形、および箱形のはり断面の桁高を一定と仮定し、断面２次モーメントＩをはりの断面積Aの関数として表現すると、次のような関係式を導入することができる。

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a) 長方形断面：　高さh一定}\\ &\qquad I=h^2/12\cdot A\\ &\text{(b) Ｉ形断面：　腹板の高さh及び厚さb一定}\\ &\qquad I=h^2/2\cdot(A-bh)/2+bh^3/12\\ &\text{(c) 箱形断面：　腹板の高さh及び厚さb一定}\\ &\qquad I=h^2/2\cdot(A-2bh)/2+bh^3/6\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

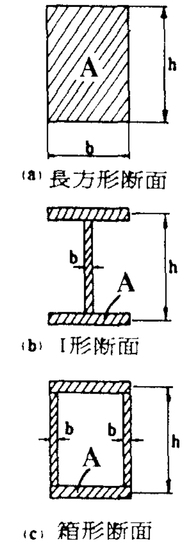

図-1はりの断面形状

この関係式を式(2)に代入することにより、応力およびたわみに関する制約条件式をAおよびMの関数として表現でき、文献[1]で提案している次のような設計アルゴリズムにより、各はり要素の最適な断面積及び使用材種を決定することができる。すなわち、

（１）原設計問題を、式(1),(2)および(3)を用いて断面積Aおよび使用材種Mを設計変数とする問題に変換する。

（２）逆変数ＺおよびMに関する近似問題を作成し、そのラグランジュ関数を導入する。

（３）準ニュートン法を用いてラグランジュ関数が最大となる双対変数$\lambda$を決定する。

（４）（３）で求めた双対変数$\lambda$を用いて、ラグランジュ関数が最小となる各はり要素の断面積A及び使用材種Mを決定する。この場合、１回の反復改良における材種Mの変化可能な範囲を、使用材種の１ランク上位あるいは下位の材種に限定する。

（５）解が収束条件を満足するまで（２）～（４）の$\lambda$，A，Mの改良過程を繰り返す。

上記の設計アルゴリズムに使用する応力およびたわみに関する制約条件の設計変数Aに関する偏微係数

$\partial g/\partial A$は、はり構造物の解析式を式(3)のＩとＡの関係式を用いてＡの関数として表現することにより容易に計算することができる。また、弾性係数が等しい材種群から各はり要素の最適使用材種を選択するための材料選択変数Ｍに関する応力の制約条件の偏微係数$\partial g_\sigma/\partial M$も、文献[1]の方法により許容応力度の差として単純に求められ、たわみの制約条件に関しては$\partial g_\delta/\partial M=0$となる。

## 3　設計例及び考察

２で述べた方法により種々のはり構造物の最適設計を行なったが、例として、図-2に示す２径間連続Ｉ形断面ばりの各桁要素の最適なＡおよびＭへの収束過程を図-3及び図-4に示す。この設計問題では、目的関数としてはりの総製作費(TCOST)を考え、式(1)の$\rho$は、はり要素の単位体積あたりの各材種の相対的な製作費(COSTM)を表わすものとする。また、使用材種は表-1に示す弾性係数が等しい５種類の材種群から選択するものとし、はりの断面積の下限値は、腹板およびフランジの最小断面形状を保持するように考慮して48cm$^2$とした。

図-3に示す許容たわみ量$\delta_a=1.0$cmの設計例では、最適解近傍でのアクティブな制約条件($S_{AG}$)はたわみ制限のみとなり、すべてのはり要素の初期材種を、たわみ制限に対して最も不利な材種５と仮定しても、各反復改良ごとに確実に改良され、６回の改良でたわみ制限に対して最適な材種１に収束し、さらに４回の反復改良で最適な断面積を得ている。このように、応力またはたわみ制限のいずれか一方のみがアクティブな制約条件となる設計問題では、最適材種より最も離れた材種を初期値としても、各反復改良ごとに確実に最適な材種への改良が行なわれ、最適な材種が決定された後、さらに２～４回の反復改良で最適な断面積に収束している。

また、図-4の許容たわみ量$\delta_a=3.0$cmの設計例では、応力およびたわみに関する制約条件の双方がアクティブとなり、最適解の近傍で材種及び断面積の値が振動している。このような場合には、振動している２組の使用材種の組み合わせをそれぞれ固定し、はりの断面積のみに関して最適解を求め、二つの解の目的関数値の大小を比較することにより最適解を決定することができる。

このように、文献[1]で提案している最適設計法は、はり構造の解析式におけるＩをＡの関数として表現することにより、はり構造物の各要素の最適断面積および材種を決定する設計問題にも適用することができ、かつ、上記の例題で示したように、能率的に最適解を決定できることが明らかとなった。

なお、本研究では、はりの桁高を一定として断面２次モーメントと断面積の関係式を導入し、設計問題を解いたが、今後は、はりの桁高をも変数とした場合や、弾性係数の異なる材種群からの最適材種選択問題について、さらに検討を加える予定である。

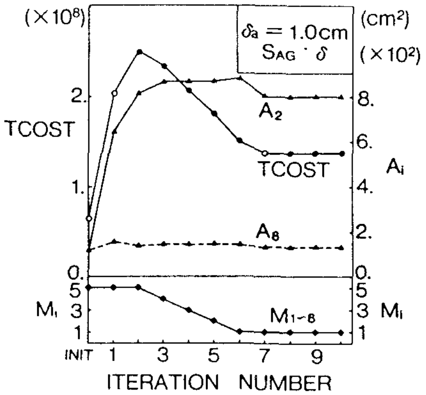


図-3　収束過程　($\delta_a=1.0$cm)

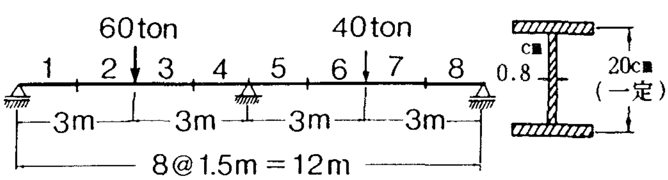


図-2　２径間連続Ｉ形断面ばり

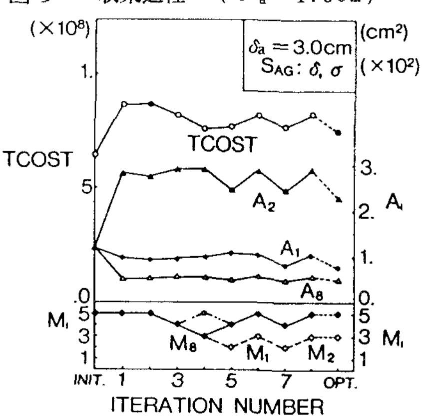


図-4　収束過程　($\delta_a=3.0$cm)

表-1　使用可能材種の材料特性

| MATERIAL NUMBER | $\sigma_a$ (kg/cm$^2$) | $E$ (kg/cm$^2$) | $COSTM$ (1/cm$^3$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1500 | $2.0\times10^6$ | 2.50 |
| 2 | 2000 | 2.0 | 3.00 |
| 3 | 2500 | 2.0 | 3.50 |
| 4 | 3000 | 2.0 | 4.00 |
| 5 | 3500 | 2.0 | 4.50 |

**参考文献** [1] S.Ohkubo and T.Nakajima, Optimum structural design with element material selection, Structural engineering & construction, Pergamon Press. Vol 3, pp.1986-1996, January, 1986 .