構造解析へのPCG法の利用について

岡山大学　工学部　正員　○谷口健男
神鋼鋼線(株)　　　　　　　次崎勇二

1. まえがき

有限要素法に代表されるマトリックス構造解析においては　その最終段階での大次元疎行列を係数とする連立一次方程式の効率良い求解が望まれ　近年　反復計算法の見直しが行なわれている。なかでも、共役傾斜法が注目され　その収束性の向上策が提案されつつある。この方法はPreconditioned Conjugate Gradient (PCG)法と呼ばれ、収束性向上策がPreconditionerであり　今日様々なものが提案されている。本報告では　このPCG法を構造解析に適用する上での問題点の抽出をまず行い　この方法のマトリックス構造解析への適用性を検討するものである。

2. PCG法

$A \cdot x = b$ を連立一次方程式とすると　PCG法のアルゴリズムは次のようになる。

Step 1. xの初期値x_0を与える。
Step 2. $r_0 = b - A x_0$
Step 3. $P_0 = B r_0$
Step 4. $\alpha_k = P_k^t B r_k / (P_k^t A P_k)$
Step 5. $x_{k+1} = x_k + \alpha_k P_k$
Step 6. $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A P_k$
Step 7. $\beta_k = r_{k+1}^t B A P_k / (P_k^t A P_k)$
Step 8. $P_{k+1} = B r_{k+1} + \beta_k P_k$　　Go to Step 3.

なお、上添字"t"は転置，下添字"k"は第k回目の計算を示す。上のアルゴリズム中に現われる行列Bがプレコンディショナーであり　もし　B＝I（単位行列）ならば、上記アルゴリズムは共役傾斜法に一致する。もし$B = A^{-1}$とすれば　$A^{-1} A \cdot x = A^{-1} b$　∴ $x = A^{-1} b$．これより　Bとしてその係数行列の良い近似逆行列が与えられれば　上記アルゴリズムの反復回数の減少が可能となる。このプレコンディショナーBとして　今日数多く提案されているが　その代表的なものとして次のようなものが挙げられる。

① 行列分解法：この方法に属するもののうち　最も有名なのが不完全コレスキー（IC）分解である。この方法は係数行列の非零要素（場合によってはその一部）に対してのみ分解を行い　その三角行列（L）よりBを次のように作成する。

$$B = (L \cdot L^t)^{-1}$$

なお　この場合、"Step 0　Newton反復法を適用"を付け加え、更に収束性の向上が図られる。

② 行列分離法：この方法は係数行列を下三角（L），主対角（D），上三角（L^t）の各部分行列に分割し、それよりBを作成する。

$$A = L + D + L^t$$

両側より$D^{-1/2}$をかけることにより

$$A' = L' + I + (L')^t$$

ここで　$1 \leq \omega < 2$　の範囲にあるパラメータωを導入して

$$C = I + \omega L'$$

この三角行列Cを用いて　プレコンディショナーBを次のように作成する。

$$B = (C \ C^t)^{-1}$$

③ 対角スケーリング：　$B = (D \cdot D^t)^{-1}$

3. 数値実験

上述した3種類のプレコンディショナーによる収束性の向上を検討するため　(1)　平板有限要素モデル，(2)　トラス，(3)　ラーメン，(4)　二次元定歪有限要素モデル，(5). 数値モデル（非対角に"−1"，対角に$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$）　の5

種類の係数行列を作成し　それらにPCG法を適用し収束性を調べた。行列分離法の結果を表1に示す。なお表中　σは条件数（最大固有値／最小固有値），ITは収束条件を10^{-7}とした時の反復回数を示す。また，最下段は元の行列の条件数である。境界条件は全モデルとも四周辺固定，荷重は等分布載荷である。この結果より次のような結果を得る。

(1). 一般には行列分離法がその他のプレコンディショナーより有利である。

(2). 理論的にはωは $1 \leq \omega < 2$ の範囲にあるが　実際には1以下において最小反復回数を得る場合がある。

(3). ωは　例えばSOR法における加速パラメータ程ITに対して鋭敏ではない。

(4). 板を除いて他のモデルに対してプレコンディショナーは　十分固有値分布を改良し　その結果がIT減少にあらわれている。一方，板の有限要素モデルにおいては，元の条件数が大きいため　反復回数の十分な減少が図れない。

なお，直接法との演算時間の比較の1例を表2に示す。これによると，系の形状　境界条件にもよるが，板以外では　PCG法は直接法と同程度もしくはそれ以下の演算時間で解が求まることがわかり　PCG法の有効性がこれより実証される。プレコンディショナーの役割りは固有値分布の改良にある。そこで板を対象とした時の行列分離法による固有値分布改良を調べた1例を図1に示す。この図より　板の場合でも，固有値分布の改良がなされているが　元の条件数の悪さのため　その改良度が不十分であるとの結論が導びかれる。図2に2種類のプレコンディショナーによる固有値分布の差を示している。これより　行列分離法の有効さが立証される。なお　行列分解法は板に対しては一般に分解不能となる。

(1) 平板 (21元)

ω	IT	σ
0.8	23	24.035
0.9	23	23.510
1.0	23	23.958
1.1	23	25.376
No Pre.		220.881

(2) トラス (32元)

ω	IT	σ
1.1	9	2.461
1.2	9	2.348
1.3	10	2.343
1.4	11	2.467
No Pre.		13.710

(3) ラーメン (21元)

ω	IT	σ
1.0	8	2.004
1.1	8	1.910
1.2	9	1.905
1.3	9	1.996
No Pre.		8.437

(4) 定歪 (32元)

ω	IT	σ
1.0	10	2.293
1.1	10	2.211
1.2	10	2.222
1.3	11	2.335
No Pre.		14.789

(5) 数値モデル (36元)

ω	IT	σ
1.2	8	2.075
1.3	8	1.900
1.4	9	1.799
1.5	9	1.816
No Pre.		11.410

表1 行列分離法

		Model	
		32x32	45x45
Band Matrix Method		1.28	5.06
PCG	1辺固定	1.24	3.14
	対辺固定	0.98	2.42
	隣辺固定	0.91	2.20
	三辺固定	0.84	2.14
	四辺固定	0.61	1.38

表2. 演算時間比較 (sec.)

4. あとがき

板の有限要素モデルを除けば，PCG法はマトリックス構造解析において十分使用に耐えるソルバーと考えられる。今後　板に対しても有効な新たなプレコンディショナーの開発が望まれ　それにより始めてPCG法は汎用的ソルバーとなりうる。

参考文献

野寺隆 "大型疎行列に対するPCG法" 数理科学セミナー No.7, 1983

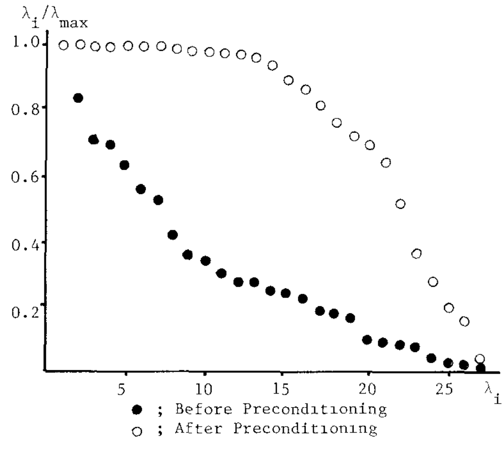

図1. プレコンディショニングによる固有値分布の変化

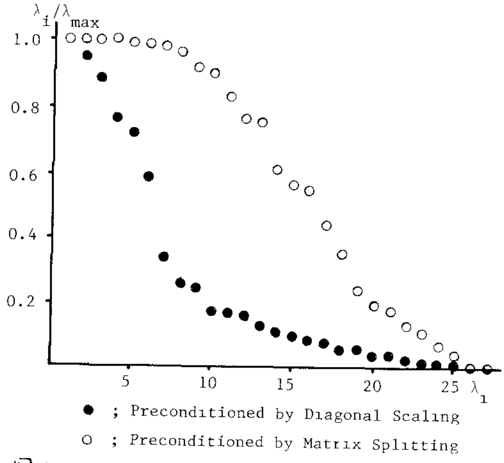

図2. プレコンディショナーの違いと固有値分布の差