

高速彎曲流に関する数値解析例

広島大学工学部 正 員 細 田 尚
 広島大学工学部 正 員 余越正一郎
 日水コン 大森 啓敬

1. はじめに; 本研究は、定常な平面流れの解析法に関する基礎的研究で、解析例として高速彎曲流を取り上げる。解析法として、定常な平面流れの基礎式と特性曲線法で解く方法と、非定常な基礎式を用いて時間発展をとり、定常状態に漸近させる方法を用い、兩者を比較・検討する。

2. 特性曲線法; 基礎式は Fig. 1 を参照して次のようになる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{\partial \theta} = B \quad (1)$$

$$\text{ここに、} \quad U = \begin{pmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} rv_r, r h, 0 \\ g, v_r, 0 \\ 0, 0, v_r \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_\theta, 0, h \\ 0, \frac{v_\theta}{r}, 0 \\ \frac{g}{r}, 0, \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -v_r h \\ \frac{v_\theta^2}{r} \\ -\frac{v_r v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

(1)式を、Fig. 2 の格子を用いて特性曲線上の式に変換すれば次のようになる。

$$P U_j^{n+1} = Q U_j^n + R U_{j+1}^n + S U_{j-1}^n + T \quad (2)$$

P, Q, R, S, T の表示については参考文献(1)を参照して下さい。

ここで問題となるのが側壁での境界条件で次のようにして表わされる。

側壁は流線であり、かつ $u_r = 0$ であるから、流線上の関係式に $u_r = 0$ を代入して

$$\left(1, 0, \frac{v_\theta}{g}\right) \begin{pmatrix} \frac{h v_\theta}{v_\theta^2 - g h} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \frac{g}{v_\theta} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{-g h}{v_\theta^2 - g h} \frac{\partial v_r}{\partial r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{g}{r g \theta} \left(h + \frac{v_\theta^2}{2g}\right) = 0$$

$$\text{となる。すなわち、} \quad h + \frac{v_\theta^2}{2g} = h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = \text{const.} \quad (3)$$

が得られる。(3)式と、たとえば左岸では右側の関係式

$$\frac{(P_{j,1})^n}{r g \theta} h_i^{n+1} = X^{-n} \quad (4)$$

とを連立して、左岸上での水深と v_θ が求められる。ここに、(1)式中、 h_0 , U_0 は上流端での水深と θ 方向の流速。

(4)式中の $(P_{j,1})^n$, h^{n+1} の下添字 1 は左岸を表わし、 X^{-n} は(1)式中の右辺を表わす。

解析例を $Fr_0 = 2.04$, $R/B = 20.0$, $B/h_0 = 10.0$ に対して Fig. 3, 4, 5 に示した。Fig. 3 は右岸・左岸での水深変化であり、右左岸で非対称とな、ている。上昇部は von Kármán⁽¹⁾の解と一致し、first peak の発生位置は Lorenz⁽¹⁾の解とほぼ一致している。Fig. 4, Fig. 5 には水深、 v_θ の水路幅方向の分布を示した。

3. 差分法; 実際の現象の解析には差分法が有効であり、通常、定常な平面流れを解析するときには、非定常な基礎式の時間発展をとり、定常状態に漸近させる手法が用いられる。そのため、本研究で用いられる基礎式は次のようになる。

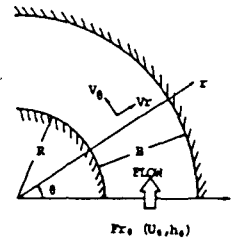


Fig. 1 座標系

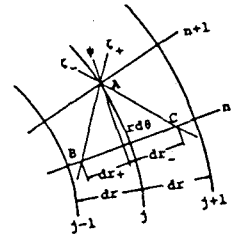


Fig. 2 特性曲線

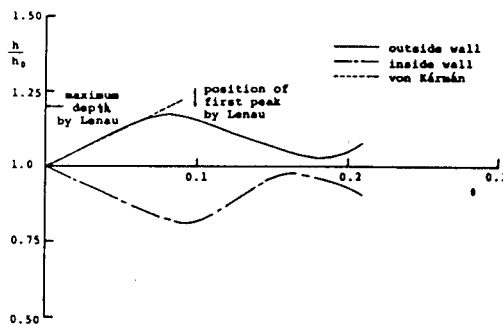


Fig. 3 右・左岸の水深変化

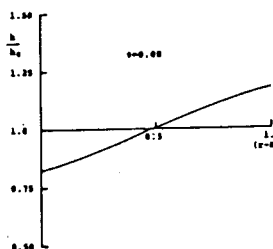


Fig. 4 水深の水路幅方向の分布

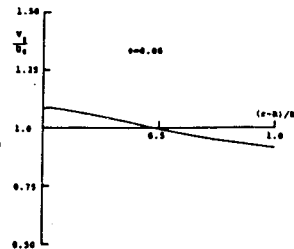


Fig. 5 円方向の流速の水路幅方向の分布

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_r r)}{r \partial r} + \frac{\partial(hv_\theta)}{r \partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_r h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_r^2 r)}{r \partial r} + \frac{\partial(hv_r v_\theta)}{r \partial \theta} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{v_\theta^2 h}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_\theta h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_r v_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(hv_\theta^2)}{r \partial \theta} + \frac{gh}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta h}{r} = 0 \quad (7)$$

格子分割と水理量の定義位置は Fig. 6 のとおりである。側壁では $v_r = 0$ とすればよく、上流端では $h = h_0$, $v_\theta = 0$, $v_r = 0$ とした。問題となるのは下流端境界条件である。 h , v_θ , v_r の値を与えることはできないので、ここでは、 v_θ , v_r の θ 方向のこう配が 0 となるようにした。

慣性項には風上差分を用い時間発展をとった。解析領域は下流端を $\theta = 0.3$ の位置にとり、 $dr/B = 0.025$, $d\theta = 0.01$ とした。解析の水理諸量は $Fr_0 = 1.43$, $R/B = 20$, $B/h_0 = 5$ であり、差分法の数値解析とともに、水理条件を合わせて前節で述べた特性曲線法による数値解析も行、た。その結果として水深の右岸・左岸の θ 方向の分布を示したのが Fig. 7 である。水深は first peak までの上昇部では両解析法ともほぼ一致し、first peak の発生位置もほぼ同一であるが、first peak の値は差分法の方が小さい。first peak 以後は、特性曲線法の結果に比べて差分法の方は peak の位置が若干遅れ、振幅の変化が非常に小さくなっている。これは、下流端での境界条件として v_r , v_θ の θ 方向の変化を 0 とする方法を用いている影響が現われているためであり、今後の検討が必要であると考えられる。

4. おわりに；本研究では、定常な平面流れの解析例として高連弯曲流を取り上げ、特性曲線法と差分法を用いて検討したが、差分法のばあいの下流端境界条件の与え方に問題があり、今後の課題としたい。さらに、差分法による、衝撃波の発生するばあいの解析の可能性について検討したい。

参考文献 (1) 細田, 若佐, 余越; 第 28 回水理講演会論文集, 1985, (2) 例えば 若佐義明; 水理学, 朝倉書店, 1969 (3) Lennau, C.W.; Proc. ASCE, EM, Vol. 105, 1979

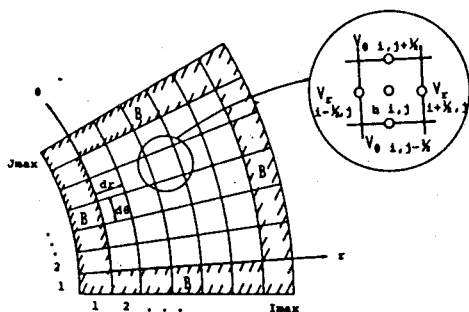


Fig. 6 格子分割

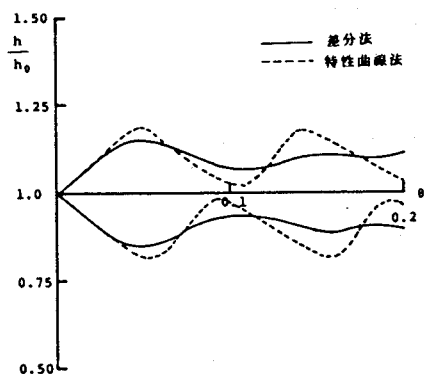


Fig. 7 両解析法の比較