

カルマン渦列のグラフィック表示について

福山大学工学部 正員 梅田 真三郎
東広島市 " 〇森行 裕 章

1. まえがき

本研究は、数値計算による流れの可視化への手始めとして数値解析結果の流れの表示方法の工夫を試みたものである。今回は非定常解析例として数値解析にSOLA法を用いカルマン渦列を再現し、そのグラフィック表示を試みた。

2. SOLA法¹⁾

2次元の x - y 平面流れについて、 u, v, p を未知変数とする Navier-Stokes 方程式を考える。この式で与えられる流れを離散化するにあたっては、従来から自由表面を持つ流れの数値解法として知られている MAC 法と同様にセル構造を考えた SOLA 法を用いる。この差分法では、求めるべき流れの変数 u, v はセル・エッジで定義し、その空間メッシュ点を $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ などとせず、FORTRAN のソース・リストに則して点 (i, j) で表わすところが MAC 法と異なる。時刻の点 (n) として、基礎方程式を差分化すると連続式及び運動方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}) = 0 \quad (1)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} (p_{i,j}^n - p_{i+1,j}^n) + g_x - FUX^n - FUY^n + VISX^n \right] \quad (2)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta y} (p_{i,j}^n - p_{i,j+1}^n) + g_y - FVX^n - FVY^n + VISY^n \right] \quad (3)$$

ここで、 $p_{i,j}^n$ は圧力 p を密度 ρ で割算しており、 FUX, FUY, FVX, FVY は対流項に、 $VISX, VISY$ は粘性項にそれぞれ関するもので、紙面の都合でそれらの諸式のうち FUX と $VISX$ の式を以下に示す。

$$FUX^n = \frac{1}{4\Delta x} \left[(u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n)^2 + \alpha |u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n| \cdot (u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) \right. \\ \left. - (u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n)^2 - \alpha |u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n| \cdot (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) \right] \quad (4)$$

$$VISX^n = \nu \left[\frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right] \quad (5)$$

ここでの対流項に導入されている重み係数 α は、数値計算上の精度や安定性に関係する。今回は精度と安定性の両方を考慮して、 $\alpha = 0.5$ として数値計算を行った。

さて SOLA 法の数値計算の手順については、流速及び圧力を次の 2 段階の繰り返しによって決定する。

- ① 前の時間ステップの (u, v, p) を用いて運動方程式から流速成分の第 1 近似を前進差分により求める。
- ② 連続方程式を満たさないことに対する補正として、圧力の n 回反復値を次式で求める。

$$\beta = \frac{\omega}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \quad (6) \quad \delta p_{i,j} = -\beta D \quad (7) \quad p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \delta p_{i,j} \quad (8)$$

ここに $p_{i,j}$ は、本来零となるべき連続式の未足分 D に比例するようにとられ、加速係数 ω は、一般に $\omega = 1.7$ とされている。上式の p の値を用いて流速の n 回反復の修正値を求める。たとえば u については、

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + \Delta t \delta p_{i,j}^{(n)} \Delta x \quad (9) \quad u_{i-1,j}^{(n+1)} = u_{i-1,j}^{(n)} + \Delta t \delta p_{i,j}^{(n)} \Delta x \quad (10)$$

この操作を $D \rightarrow 0$ になるまで繰り返す。

今回、流れの中に角柱と円柱を置いた場合の解析を試みた。計算にあたっては、構造物などの壁に垂直方向の速度成分は零とし、接線方向の速度成分は勾配を零と考えるような境界条件を適用した。一方流入境界では、一方向への一様流速を与え、領域における流速 u, v 及び圧力 p を求めた。さらに流速 u, v から流れ関数 Ψ を計算し、流線図を作成した。

3. カルマン渦列のグラフィック表示

可視化実験結果などに見られる構造物背後の渦の状況を再現するために、得られた流線図を基に数学における媒介曲線を適用してカルマン渦列の表示を試みた。

使用したカラーディスプレイ装置はグラフィカ社製で、ラスタースキャン方式をとり、解像度が 768×512 で、線のギザギザを抑えるために輝度変調を行うスムーズベクタ機能²⁾が搭載されている。

まずカルマン渦列発生³⁾の初期段階では、構造物背後に双子型の渦ができる。流線図から渦の中心や大きさなどを判断し、渦の中心から等角ラ線²⁾を適用して渦を表示した一例が図-1である。

次に双子型の渦が下流に移動し、渦列の生成・発達から千鳥状に2列に並んだ渦が得られる。この状況を再現するために、実験による流れの写真結果を参考に等角ラ線とクロソイド曲線及び二次曲線などにより渦の作成と渦の連結を試みた結果が図-2である。

安定したカルマン渦列には、その渦の距離・間隔と流れの速さや構造物の大きさの間には一定の法則性があることが実験的に知られているので、この性質を利用して図-2などの渦列の作成を基にアニメーション的に表示することができる。その手順を示したのが図-3である。

4. あとがき

数値解析法に SOLA 法を用いて構造物周辺の流れの解析を試み、得られた結果に媒介曲線を適用することによりカルマン渦列のグラフィック表示を可能にした。しかし今回の渦の旋回などに物理的な考察を十分にとり入れることができなかったのも、今後数値解析で得られた流速場での粒子の追跡を解析に加え、グラフィック表示を発展させていくべきであろう。

最後に、この研究は昭和59年度文部省科学研究費（奨励研究）による研究の一部であることを付記する。

<参考文献>

- 1) 高橋亮一：コンピュータによる流体力学＜演習＞、構造計画研究所刊
- 2) 梅田真三郎：円柱まわりの流れのグラフィック表示について、流れの可視化学会、Vol.4、Suppl., 1984
- 3) 木村竜治：流れの科学、東海大学出版会

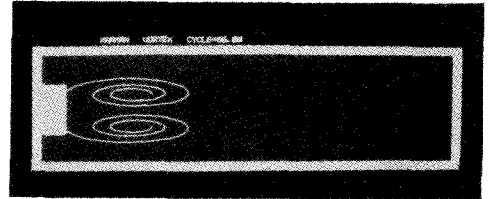


図-1 双子型の渦



図-2 カルマン渦列

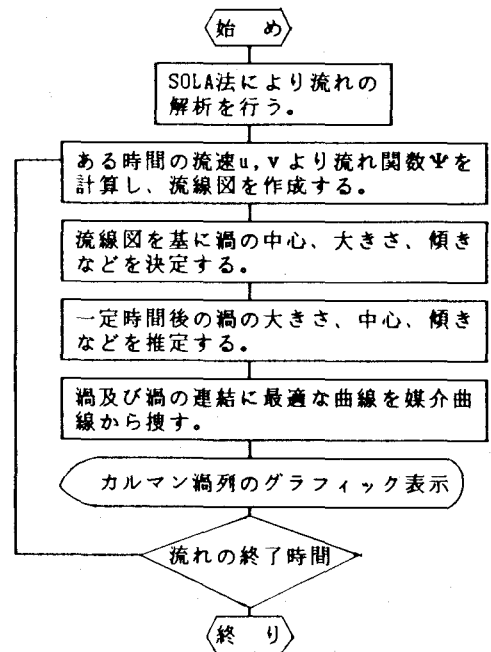


図-3 渦列の表示手順