

エネルギー原理による非線形構造解析法に関する基礎的考察

愛媛大学工学部 正会員 大久保 稔二
愛媛大学大学院 学生員 〇和多田 康男

1 まえがき 材料の非線形性を考慮した構造物の解析法に関してこれまでに種々の方法が提案されているが、そのほとんどが荷重増分法に基礎をおく解法である。一方、エネルギー原理に基づく構造解析法として、1968年にSCHMIT, FOXらにより線形挙動を示す材料についてポテンシャルエネルギー最小化に基づく構造解析法に関する研究がなされている。本研究は、材料の非線形性を考慮して構造系のコンアリメンタリエネルギーを非線形計画法により最小化することによって構造物の非線形解析を行う方法について基礎的な考察を行う。ものである。

2 コンアリメンタリエネルギー最小化に基づく構造解析法の定式化¹⁾ この方法では、未知変数として各部材要素の部材力 $P = [P_1, \dots, P_n]^T$ (n : 部材要素の数) を考慮し、各可動節点における力の釣合方程式を制約条件として構造要素のコンアリメンタリエネルギー $\beta(P_i)$ の和 Π_c を最小にするような部材力 P^* が構造物の真の部材力となることにより構造解析を行う方法であり、トラス構造物に対しては次のように定式化できる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Find } P, \text{ such that } \Pi_c(P) = \sum_{i=1}^n \beta_i(P_i) A_i \ell_i \rightarrow \min. \\ \text{subject to } g = F - CP = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 A_i, ℓ_i はそれぞれ部材 i の断面積および部材長、 $g = [g_1, \dots, g_m]^T$ (m : 自由度の数) は各可動節点における力の釣合方程式、 $F = [F_1, \dots, F_m]^T$ は各可動節点に作用する外力ベクトル、 C は P の F 方向への変換マトリックスである。

本研究では式(1)の最小化問題を2種類の非線形計画法 (SLP (逐次線形計画法) およびSQP (逐次2次計画法)) を用いて解き、未知変数 P を決定した。コンアリメンタリエネルギー最小化に基づく構造解析法の概略的な流れ図を図-1に示す。

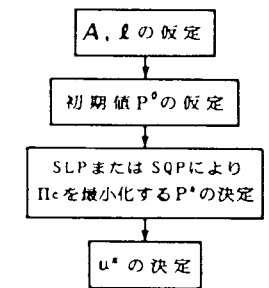


図-1 コンアリメンタリエネルギー最小化による構造解析法の概略的な流れ図

3 SLPによる解法²⁾ SLPは目的関数、制約条件と共に線形近似し、さらに変数の変域を制限する制約条件を付加して近似のLP問題を導入し、このLP問題を解き改良解を決定する。このような改良を反復して行い最適解を決定する手法である。SLPにより式(1)の最小化問題を解くための線形近似問題は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Find } \Delta P, \text{ such that } \nabla \Pi_c^T \Delta P \rightarrow \min. \\ \text{subject to } g_i - C_i \Delta P = 0, |\Delta P| \leq \xi P \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $\nabla \Pi_c = [\partial \Pi_c / \partial P_1, \dots, \partial \Pi_c / \partial P_n]^T$ 、 ΔP は部材力 P の変化量、 ξ は変数の変域を制限するパラメータ (move limit) である。式(2)から明らかなように、コンアリメンタリエネルギー最小化による構造解析をSLPで解くためには力の釣合方程式に関する等号制約条件を考慮する必要があるが、本研究では次のようにしてこの等号制約条件を満足させ、かつ $\nabla \Pi_c^T \Delta P$ を最小化する ΔP を決定した。すなわち、等号制約条件に対するスラック変数を導入せずにシンプレックス表を作成し、最も違反している等号制約条件から順次目的関数が最も減少するかあるいは最小に増加する実変数について基底変換を行う。このようにしてすべての等号制約条件が満足された段階でシンプレックス法による通常の基底変換を行い目的関数を最も減少させる ΔP を決定した。

4 SQPによる解法²⁾ SQPは、まず目的関数を2次近似、制約条件を線形近似し2次計画問題を導入する。この問題を勾配射影法により解き改良解を求める。さらに目的関数の2次の係数行列をBFGS公式により修正し、改良解に対する新たな近似2次計画問題を作成する。このようにして逐次、2次計画問題を作成し解の改良を繰り返すことにより最適解を決定する手法である。SQPにより式(1)の最小化問題を解くための近似2次

計画問題は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Find } \Delta P, \text{ such that } \nabla \Pi_c \Delta P + \frac{1}{2} \Delta P^T H \Delta P \rightarrow \min. \\ \text{subject to } g_i - c_i \Delta P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 ΔP の2次の項にかかる係数行列 H は式(1)の最小化問題におけるラグランジュ関数の1次の偏微係数を用いてBFGS公式により計算される。

式(3)は等号制約条件を有する2次計画問題となるが、本研究ではこの問題を次のような手順で解くこととした。

- ① 初期許容解の決定……勾配射影法では、初期値は式(3)の許容領域内になければならないので、前述のSLPと同様に等号制約条件に対するシンプレックス表を作成し、違反している制約条件に対する基底変換によってすべての等号制約条件を満足するような初期許容解 ΔP_0 を等号制約条件面上に決定する。
- ② 改良方向の決定……勾配射影法における ΔP の改良方向は、目的関数の最急降下方向 $-\nabla \Pi_c$ のactiveな制約条件面上への直交射影として与えられるが、この場合すべての等号制約条件と常にactiveな制約条件として扱うことにより等号制約条件に違反しない改良方向を決定することができる。
- ③ 改良幅の決定……改良方向に沿っての ΔP の改良幅は、通常の勾配射影法による方法により決定する。

5 解析結果および考察 上記のSLPおよびSQPの方法により種々の不静定トラスの解析を行い、それぞれの解法の検討および荷重増分法との比較を行った。図-2のような非線形材料を仮定し、図-3に示す3, 6, 10部材トラスの解析を行った結果を表-1に、また3部材トラスの解析における収束状況を図-4に示す。いずれのトラスの解析結果も荷重増分法により得られた解とほぼ一致しており、本研究の方法による構造物の非線形解析が可能であることが明らかとなった。SLPを用いた場合では、トラスの部材数の増加とともに最終解に到達するために必要な反復計算回数が増加し、それに伴い計算時間も多くなるが、解の収束状況は Π_c の1次の偏微係数により改良方向を決定する関係から安定している傾向がある。一方、SQPを用いた場合にはトラスの部材数にあまり関係なく10回前後の反復計算で最終解に到達し、計算時間も荷重増分法と比べて少ないほぼ等しい値となっている。このようにコンアリメンタリエネルギー最小化に基づく構造解析法は、材料の線形性や非線形性に関係なく構造物の解析を行うことができ、式(1)の最小化問題を解くために用いる非線形計画法によっては、荷重増分法に比べても能率的に解を得ることができる。さらに、非線形計画法をサブルーチンとして利用する場合には定式化が非常に簡単であるため、構造物の非線形解析法として十分有効であると思われる。

参考文献 1) 鷲津スー一郎「エネルギー原理入門」培風館 1980 2) 大久保雄二「構造設計におけるOptimizer

Subroutine Libraryの作成」昭和59年度科学研究費補助金(双葉研究(1))研究成果報告書

表-1 解析結果

		節 力 (x1000kg)				Π_c (kg-cm)	ITE ¹⁾ (%)	CPU ²⁾ (秒)
		P_1	P_2	P_3	P_4			
3部材トラス	線形解	11.72	23.43	11.72	—	—	—	—
	初期値	11.72	23.43	11.72	—	957	—	—
	SLP	13.87	20.39	13.87	—	241	10	0.21
	SQP	13.93	20.30	13.93	—	241	8	0.23
	荷重増分法	13.87	20.39	13.87	—	241	—	0.40
6部材トラス	線形解	15.86	-22.43	15.86	-24.14	—	—	—
	初期値	15.86	-22.43	15.86	-24.14	2368	—	—
	SLP	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1864	20	0.49
	SQP	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1864	8	0.31
	荷重増分法	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1864	—	0.60
10部材トラス	線形解	-29.98	-11.05	-14.31	13.97	—	—	—
	初期値	-29.98	-11.05	-14.31	13.97	1756	—	—
	SLP	-30.03	-11.28	-14.10	14.19	1755	40	2.38
	SQP	-29.93	-11.04	-14.25	14.04	1755	10	0.73
	荷重増分法	-29.98	-11.04	-14.17	14.11	1755	—	0.71

1) 節節解を得るために置いた節の出し回数 2) FACOM M1800ADによる計算時間
3) 材料が線形弾性を示す場合の解 4) 荷重増分法による解析結果

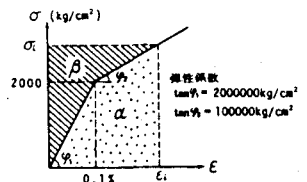
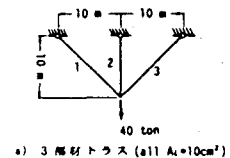
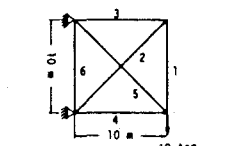


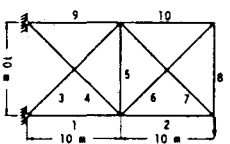
図-2 応力とひずみの関係



a) 3部材トラス (all $A_i=10\text{cm}^2$)



b) 6部材トラス (all $A_i=10\text{cm}^2$)



c) 10部材トラス (all $A_i=10\text{cm}^2$)

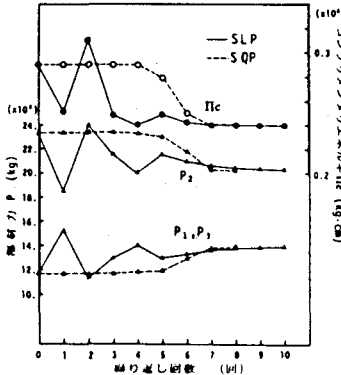


図-4 3部材トラスの収束状況

図-3 トラス構造物の形状