

## 面内変動荷重を受ける板の動的安定解析について

愛媛大学工学部 正員 大賀 木田生  
松山市 正員 田井 理仁  
愛媛大学工学部 学員 〇中島 浩之

## 1. まえがき

著者らは、有限要素法と伝達マトリックス法を結合させる方法(FE-TM法)とNewmarkの $\beta$ 法と組合せることにより、面内周期荷重を受ける薄板の動的応答解析を行い、解の精度を落すことなく、有限要素法で必要なマトリックスサイズに比較してかなり小さなマトリックスの演算により解を求めることができることを報告している<sup>1)</sup>。そこで、本研究では、面内周期荷重を受ける薄板の非線形面外振動問題にFE-TM法を適用し、得られた結果を有限要素法による結果と比較することにより本法の有効性、妥当性を検討するとともに、動的安定問題での境界振動数式により得られる安定・不安定領域との比較をも行った。

## 2. FE-TM法による動的応答解析

本法では、図-1(a)に示すように板を $m$ 個のストリップに分割し、さらにそれぞれのストリップを $(n-1)$ 個の有限要素に分割する(図-1(b))。また、それぞれのストリップに対して時刻 $(t+\Delta t)$ における増分形の運動方程式が次式のように表される。

$$M_1 \ddot{X} + C \dot{X} + \{K + [P_0 + P_1 \cos \theta(t + \Delta t)] K_g\} X = \{P_1 \cos \theta(t + \Delta t) - P_1 \cos \theta t\} K_g X(t) = \Delta Q \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 $M_1$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $K_g$ はそれぞれ各ストリップの質量、減衰、剛性、幾何剛性マトリックス、 $\Delta Q$ は増分節点カベクトル、 $P_0$ ,  $P_1$ ,  $\theta$ はそれぞれ静的荷重、周期荷重の振幅、周期荷重の内振動数、 $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ ,  $X$ はそれぞれ加速度、速度、変位の増分ベクトルを表す。ここで、時刻 $t$ における変位、速度、加速度が既知とすると、微小時間間隔 $\Delta t$ 秒後の増分速度、増分加速度の近似式は、Newmarkの $\beta$ 法より次式のように表される。

$$\dot{X} = \frac{1}{2\beta\Delta t} \dot{X} - \frac{1}{2\beta} \dot{X}(t) + \Delta t \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \ddot{X}(t) \quad \text{----- (2)}$$

$$\ddot{X} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \dot{X} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{X}(t) - \frac{1}{2\beta} \ddot{X}(t) \quad \text{----- (3)}$$

式(1)~(3)より、微小時間間隔 $\Delta t$ 秒後の増分変位は次式のようにになる。

$$A \dot{X} + G(t) = \Delta Q \quad \text{----- (4)}$$

ただし、

$$A = \left[ \frac{M_1}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{C}{2\beta\Delta t} + K + [P_0 + P_1 \cos \theta(t + \Delta t)] K_g \right]$$

$$G(t) = -\frac{M_1}{\beta\Delta t} \left[ \dot{X}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}(t) \right] - \frac{C}{2\beta} \left[ \dot{X}(t) + \Delta t \left( \frac{1}{2} - 2\beta \right) \ddot{X}(t) \right]$$

$$+ \left\{ [P_1 \cos \theta(t + \Delta t) - P_1 \cos \theta t] K_g \right\} X(t)$$

式(4)を、左側節線上および右側節線上の成分に区別して表示すると次式のようにになる。

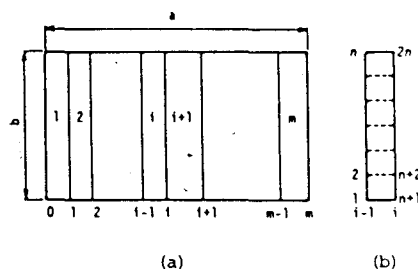


図-1 要素分割

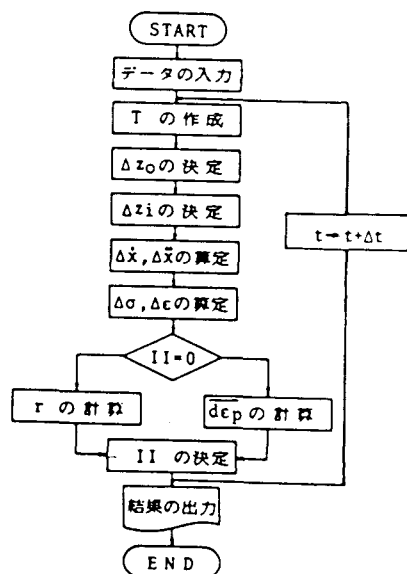


図-2 フローチャート

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q^L \\ \Delta Q^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{LL} & A_{LR} \\ A_{RL} & A_{RR} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X^L \\ \Delta X^R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G^L(x) \\ G^R(x) \end{Bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

式(5)を変換することにより、ストリップの左側節線上の節点変位、節点力と右側節線上のそれらとを結びつける伝達マトリックスが次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta X^R \\ \Delta Q^R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_{LR}^{-1}A_{LL} & A_{LR}^{-1} & -A_{LR}^{-1}G^L \\ A_{RR}A_{LR}^{-1}A_{LL} & -A_{RR}A_{LR}^{-1} & A_{RR}A_{LR}^{-1}G^L - G^R \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X^L \\ \Delta Q^L \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta Z^R = T \cdot \Delta Z^L \quad \text{----- (6)}$$

上式を用いて、伝達マトリックス法の手順に従い、順次、時刻( $t+\Delta t$ )における各節線上の未知状態量を決定していく。なお、非線形解析では材料学的非線形性のみを考慮し、降伏の判定には、von Misesの条件を用いた。また、板厚方向の塑性域の拡がりや考慮するため、板厚方向の層割りを付け、各層内で応力は直線的に変化するとした。図-2に、本研究で開発したプログラムのフローチャートを示す。

### 3. 数値計算結果および考察

本研究では、図-3に示す4辺単純支持の正方形板モデルを用い、FE-TM法および有限要素法により、図-4に示す境界振動数式により求めた動的安定・不安定領域の○印の裏で表される $P$ および $\theta$ の値について動的応答解析を行った。いずれの荷重条件においても、本法および有限要素法による数値計算結果は、1%以内の誤差で一致した。図-5(A1~A3)に $\mu=0.3$ 、 $\theta/2\omega^*=1.15, 1.0, 0.83$ における応答結果を示す。図-4に示す動的安定・不安定領域と本法により得られた応答性状は、ほぼ一致したが、左右の境界付近(A1, A3)では、応答性状が異なり、右側境界付近(A1)では、変位が初期変位より大きくなり、ていっ傾向がみられる。また、動的不安定領域内にある図-5(A2)では、塑性域が0.097秒で現れ、応答周期にずれが生じるとともに、応答振幅が変化し、中立軸が最初に塑性域が現れた方向にずれている。

### 4. まとめ

本法による結果と有限要素法による結果はよく一致しており、本法の妥当性が確認された。また、動的安定・不安定領域の決定には、従来の境界振動数式のみならず、動的応答解析を行い、その振動性状を調べる必要がある。

### 参考文献

- 1) 大畑他；FE-TMによる薄板の振動解析について，土木学会中四支部講演会概要集，1984.7
- 2) ボローチン；弾性系の動的安定，コロナ社，1972

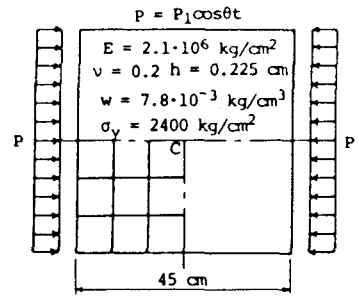


図-3 解析モデル

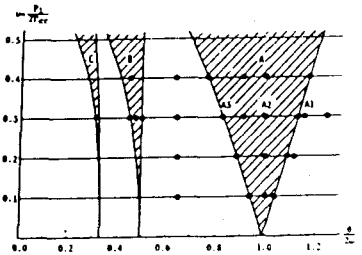


図-4 動的安定・不安定領域図

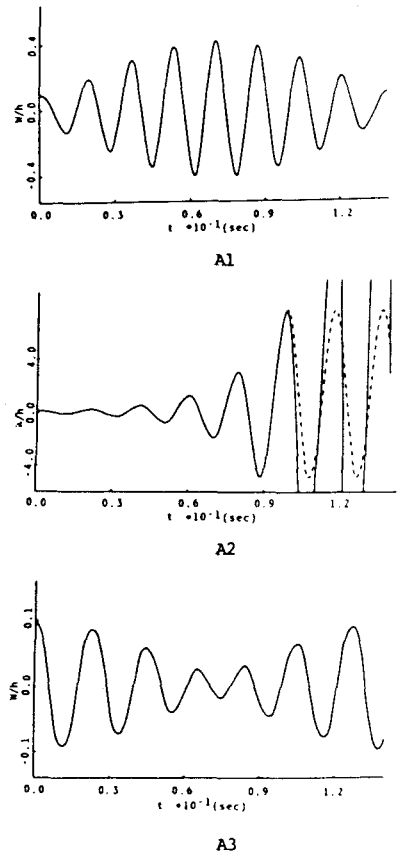


図-5 変位-時間曲線