

高次成分と考慮した片持矩形板の静的・動的解析

吳工専・土木工学科 ○ 丸上 晴朗

山梨大・工・土木科 平島 健一

1. 緒言

片持矩形板の解法は解析解を求める方法と数値解によるものとの二つに大別できる。前者の方法を用いた研究には藤町¹⁾, Koiter²⁾, Coull³⁾, Zhang⁴⁾, Lee⁵⁾等が対準し、後者によるものとしては、別とは有膜要素法によるもの⁶⁾, 差分法による Nash⁷⁾の研究がある。Lee⁵⁾は高異方性板を対象として、著者の一人による平板の2次元化した一般化高次理論と数値的定式化過程を適用し、さらに板幅方向(X_2 方向)への固有函数展開により、"より1次元化した基礎式"をもとに、近似解および厳密な解析解を得て⁵⁾。すなわち、彼等の研究は平板の鉛直変位と2つの未知項の和に近似する2nd-orderの解析であるが、本研究では片持矩形板の一般的解析手法を確立するための手はじめとして3rd-orderの解析とその他の手法による具体的な数値結果の比較検討を目的として⁸⁾。断面の都合上、ここでは前者の3rd-orderの解析過程の概要とその数値例を示すことにする。

2. 2次元化した曲げ振動方程式の1次元方程式への変換

片持矩形板の座標系と寸法をFig.1のように定める。また以下使用する記号を次のように定義する。 $u_2^{(n)}$: X_2 方向への板の鉛直変位(たわみ)。 $T_1^{(n)}$, $T_3^{(n)}$: X_1, X_2 軸に肉する曲げモーメント, $T_5^{(n)}$: せん断力, $T_7^{(n)}$: せん断力, $T_9^{(n)}$: 断面内に作用する鉛直方向せん断力, ρ : 板密度, γ_{ij} : 異方性係数。なお数分記号として $\partial^2 u_2^{(n)} / \partial X_1^2 \partial X_2 = u_{2,12}^{(n)}$, $\partial^2 u_2^{(n)} / \partial X_2^2 = u_{2,22}^{(n)}$ 等を用いる。2次元化した平板理論の一般式から、 γ_{ij} の過程を経て、 $T_1^{(n)}$, $T_3^{(n)}$, $T_5^{(n)}$ と $u_2^{(n)}$ で表示する式次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_1^{(n)} &= -\frac{E}{12} (\gamma_{11} u_{2,11}^{(n)} + \gamma_{13} u_{2,33}^{(n)} + 2\gamma_{15} u_{2,13}^{(n)}), \quad T_3^{(n)} = \dots \\ T_5^{(n)} &= -\frac{E}{12} (\gamma_{15} u_{2,11}^{(n)} + \gamma_{35} u_{2,33}^{(n)} + 2\gamma_{55} u_{2,13}^{(n)}). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

平板曲げの振動(屈曲)方程式は次式で表わされる。なお、 q は板面上の単位分布荷重である。

$$T_{1,11}^{(n)} + 2T_{5,33}^{(n)} + T_{7,33}^{(n)} + q = \rho h \ddot{u}_2^{(n)} \dots \dots \dots (2)$$

なお等方性板の場合には γ_{ij} は異方性係数 E , ポアソン比 ν を用いて次のように表わされる。

$$\gamma_{11} = \gamma_{33} = E/(1-\nu^2), \quad \gamma_{13} = \nu E/(1-\nu^2), \quad \gamma_{55} = E/2(1+\nu), \quad \gamma_{15} = \gamma_{35} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

したがって、等方板の場合、式(2)は変位係数 $u_2^{(n)}$ を用いて次のように表わされる。

$$D (u_{2,1111}^{(n)} + 2u_{2,1133}^{(n)} + u_{2,3333}^{(n)}) + \rho h \ddot{u}_2^{(n)} = q, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2) \dots \dots \dots (4)$$

式(2)または(4)の解で $X_1 = \pm a$, $X_2 = \pm c$ の曲げモーメント, せん断力, たわみ等に関する境界条件と恒等的に満足する式と直接求めることは一般に困難であるので、ここでは板幅方向(X_2 方向)の端部 $X_2 = \pm c$ でせん断力 $T_5^{(n)} = T_7^{(n)} = 0$ の境界条件とを設け、 $u_2^{(n)} = u_2^{(n)}(X_1, X_2; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_2^{(n)}(X_1; t) \cdot \phi_n(X_2)$ のように展開するものとする。上記の境界条件から $\phi_n(X_2)$ は次式で満足する。すなわち、

$$\phi_n(X_2) = \phi_n(\eta) = \frac{\cos(\pi\eta/2 + R_n\eta)}{\cos(\pi\eta/2 + R_n)} + \frac{\cosh(\pi\eta/2 + R_n\eta)}{\cosh(\pi\eta/2 + R_n)}, \quad (\pi/2), \quad \phi_0(\eta) = \sqrt{3}\eta, \quad \phi_1(\eta) = 1, \quad \eta = X_2/c \dots \dots \dots (5)$$

すなわち、 R_n は次の方程式を満たす解である。

$$\tan R_n = \pm \tanh R_n, \quad R_n = C\theta_n, \quad \theta_n = \sqrt{3}\pi\eta/12, \quad b = \eta/2 \dots \dots \dots (6)$$

なお、 $\phi_n(\eta)$ には次の直交条件が成立してゐる。

$$\int_{-1}^1 \phi_m \cdot \phi_n d\eta = 2\delta_{mn}, \quad \int_{-1}^1 \phi_m^* \cdot \phi_n^* d\eta = 2R_n^* \delta_{mn} \dots \dots \dots (7)$$

空間座標に就いて 1 次元化された変位係数 $v_2^{(n)}(x_1, z)$ は場の方程式 (2) または (4) に対する変分式 (仮想仕事式) であり、=, 三の演算の 5 次式が求められる。

$$H_{1,11}^{(n)} - \frac{2}{c} H_{5,1}^{(n)} + \frac{1}{c^2} H_5^{(n)} + g^{(n)} + V^{(n)} = 2\rho h \ddot{v}_2^{(n)}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$= \text{= に, } H_1^{(n)} = \int_{-1}^1 T_1^{(n)} \phi_n d\eta, \quad H_5^{(n)} = \int_{-1}^1 T_5^{(n)} \phi_n d\eta, \quad H_5^{(n)} = \int_{-1}^1 T_5^{(n)} \phi_n' d\eta, \quad V^{(n)} = \left[\frac{1}{c} (T_4^{(n)} + T_5^{(n)}) \phi_n - \frac{1}{c^2} T_5^{(n)} \phi_n' \right]_{-1}^1, \\ g^{(n)} = \int_{-1}^1 g \phi_n d\eta \text{ である。}$$

上式に式 (1) および $U_2^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} U_2^{(n,m)} \cdot \phi_m$ を代入整理すれば、最終的に次の 1 次元化常微分方程式がえられる。

$$\gamma_n U_{2,1111}^{(n)} + \frac{1}{c} \gamma_5 \sum_{m=0}^{\infty} E_{mn} U_{2,111}^{(n,m)} + \frac{1}{2c^2} \sum_{m=0}^{\infty} F_{mn} U_{2,11}^{(n,m)} + \frac{1}{c^2} \gamma_5 \sum_{m=0}^{\infty} G_{mn} U_{2,1}^{(n,m)} + \frac{1}{c^2} \gamma_n \kappa_n U_2^{(n)} + \frac{12}{\kappa^2} \rho \ddot{U}_2^{(n)} = \frac{6}{\kappa^2} (g^{(n)} + V^{(n)}).$$

= に, E_{mn} , F_{mn} , G_{mn} 等は固有関数 ϕ_n , 弾性定数 γ_j と具体的な n を示すべき量である。

上式は x_1 座標に肉する 1 次元化方程式であることあり、これを解いて $x_1 = \pm a$ の境界条件を設定してやれば、具体的な $v_2^{(n)}$ が求められることになる。= として採用項数として n が無限度に増大すれば解析的に解が得られることになる。

3. 有限項の打ち切りと片持矩形板の静的曲げ解析例

$U_2^{(n)}$ の展開項 $v_2^{(n)} \phi_n$ は n が偶数の場合には x_1 軸に内対称変形モード、 n が奇数の場合には反対称変形モードを表すが、= として対称変形の場合に $v_2^{(0)}$, $v_2^{(2)}$, $v_2^{(4)}$ を採用した場合 (3rd-order) で荷重状態としては Fig. 1 に示したように、 $x_1 = +a$ において等分布線荷重 $g' = g$ 、右全幅 $2c$ にわたって加えられることを考える。もし $x_1 = -a$ は固定端とする (したがって $x_1 = -a$ で $v_2^{(n)} = v_{2,1}^{(n)} = 0$ ($n=0, 2, 4$) が成立)。

計算過程は省略するが、等方等質の正方形板 ($\nu=0.30$, $a=c$)

に対し、自由端 ($x_1=a$) との端近変位 (たわみ) $U_2^{(n)}$ に対する結果の比較が Table 1 に示されてゐる。

一般的に 2nd-order の結果に比べ、項数を増した 3rd-order のものがやや大きめの値を示す。端部 ($x_1=a$, $x_2=\pm c$) を除けば、既得の結果とを比較しても同様の傾向がみられる。

Table 1. Deflection $U_2^{(n)}$ at free edge ($x_1=a$)

Location	$x_2 = 0$	$x_2 = \pm c/2$	$x_2 = \pm c$
3rd-order	4.1174	4.0901	4.0145
2nd-order	4.0950	4.0634	3.9951
Normachi ⁽¹⁾	4.068	4.056	4.044

4. 結 言

= として板幅方向に固有関数展開を実施した 1 次元化した平板理論の 3rd-order の結果の例のみを提示したが、その他の理論による計算値との比較や他の荷重状態の片持矩形板の取扱、手法と具体的な等について講演会当日に発表する予定である。

参考文献:

- 1) 熊野純雄, "カニテレー-矩形板の曲げについて", 土木学会論文集, No. 60 (1959), pp. 20~29.
- 2) Korter, W. T., & J. B. Alblas, "On the bending of cantilever, rectangular plates I~IV", Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, Ser. B, 57 (1954), pp. 250~258; pp. 259~269; pp. 549~557; 62 (1957), pp. 173~181.
- 3) Coull, A., "A direct-stress analysis of cantilever plates", J. Appl. Mech. (1965), pp. 67~70.
- 4) Zhang, F., "Asymmetric bending of rectangular cantilever plates", Appl. Math. Mech. 1 (1980), pp. 371~383.
- 5) Lee, P. C. Y. & C. S. Lam, "Stresses in rectangular cantilever plates under transverse loading", Int. J. Solids & Structures, 19 (1983), pp. 55~66.
- 6) Hageviers, O. L. & North, "A comprehensive study of a fixed edge bending moments of thin rectangular cantilever plates under point loading", J. Eng. Indust., T. ASME (1976), pp. 766~772.
- 7) Nash, W. A., "Several approximate analysis of the bending of a rectangular cantilever plate", J. Appl. Mech. (1952), 32~36.
- 8) 平島健一・根岸嘉和, "板厚方向の成分を考慮した代表的な 2 次元化平板理論", No. 330 (1982), pp. 1~14; "数種の平板理論の動特性に関する研究", 土木学会論文集, No. 333 (1982), pp. 21~34; 同, No. 336 (1983), pp. 9~20; 同, No. 341 (1984), pp. 167~172.