

トラス部材の最適使用材種の決定法について

愛媛大学工学部 正員 ○大久保 慎二
愛媛大学大学院 中 嶋 毅

1. まえがき

筆者の一人はこれまでに、弾性係数が等しく、許容応力度および製作単価が異なる同種材料間の最適選択問題を、Dual Approachにより解く方法を展開するとともに、トラス構造物の最小製作費設計問題に適用した例を示し、その有効性を明らかにしているが、本研究では、弾性係数および許容応力度の異なる異種材料の中からトラス構造物の各部材に使用する最適な材種を決定する方法について考察を行った結果について述べるものである。

2. 設計問題の設定

トラス構造物の部材の断面寸法に関する設計変数として各部材の断面積 $A = [A_1, \dots, A_n]^T$ 、各部材の使用材種に関する設計変数として $M = [M_1, \dots, M_n]^T$ を導入する。

制約条件として部材の応力に関する制約条件

$$g_{0j}(A, M) = \sigma_{0j}(M_j) - |\sigma_j(A, M)| \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (1)$$

および格点のたわみに関する制約条件

$$g_{0k}(A, M) = \delta_{0k} - |\delta_k(A, M)| \geq 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (2)$$

を考慮し、目的関数として次式で表わされるトラス構造物の製作費を考え、これを最小とする A および M を決定することとする。

$$W(A, M) = \sum_{i=1}^n p_i(M_i) A_i l_i = \sum_{i=1}^n W_i(M_i) A_i \quad (3)$$

ここに、 $p_i(M_i)$ は部材 i の単位容積当りの製作費、式(1)を X の逆変数 $Z = 1/X$ および $M = M^0 + \Delta M$ について線形近似すると次式を得る。

$$g_{0j}(Z, M^0 + \Delta M) = \bar{U}_{0j}(Z^0, M^0) - \sum_{i=1}^n [C_{ij} Z_i + D_{ij} \Delta M_i] \geq 0 \quad (4)$$

ここに、 ΔM は各部材の材種の変化量を表す変数、 C_{ij} は $-\partial g_{0j}(Z^0, M^0) / \partial Z_i$ であり、 N_j を部材 j の実軸力とすると次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= N_j - \partial N_j / \partial A_i \cdot A_i^0 & (i=j) \\ C_{ij} &= -\partial N_j / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2 / A_i^0 & (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、 D_{ij} は材種 M_i の変化による部材 j の応力制限 g_{0j} の変化率 $\partial g_{0j}(Z^0, M^0) / \partial M_i$ であり、 $M_i = M_i^0 + \Delta M_i$ の変化により弾性係数 E_i および許容応力度 σ_{0i} がそ

れぞれ σ_{0i}^0 および E_i^0 に変化するものとする。 D_{ij} は次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= -(\sigma_{0j}^0 - \sigma_{0j}^i) + (1/A_i \cdot \partial N_j / \partial A_i (E_i^0 - E_i^i)) & (i=j) \\ D_{ij} &= 1/A_i \cdot \partial N_j / \partial A_i (E_i^0 - E_i^i) & (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

また、 $\bar{U}_{0i}$ は次式となる。

$$\bar{U}_{0j}(Z^0, M^0) = g_{0j}(Z^0, M^0) + \sum_{i=1}^n C_{ij} Z_i^0 \quad (7)$$

同様に、たわみ制限に関する制約条件式(2)は次のように線形近似される。

$$g_{0k}(Z, M^0 + \Delta M) = \bar{U}_{0k}(Z^0, M^0) - \sum_{i=1}^n [C_{ik} Z_i + D_{ik} \Delta M_i] \geq 0 \quad (8)$$

$$\text{ここに、} C_{ik} = \partial \delta_k / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2 \quad (9)$$

$$D_{ik} = \partial \delta_k / \partial A_i \cdot (E_i^0 - E_i^i) \quad (10)$$

$$\bar{U}_{0k} = g_{0k}(Z^0, M^0) + \sum_{i=1}^n C_{ik} Z_i^0 \quad (11)$$

なお、 σ_{0i}^0 および E_i^0 は M の変化により不連続な離散値をとるので式(6)および(10)の D_{ij} は各材種ごとに計算する必要がある。

3. 双対設計問題の導入および改良解の決定

Dual Approach では、式(3)の目的関数および2.で導入した線形近似の制約条件 $g_{0j}(Z, M^0 + \Delta M)$ および $g_{0k}(Z, M^0 + \Delta M)$ を用いて近似の設計問題を設定し、この設計問題のラグランジュ関数(式(12))を

$$\left. \begin{aligned} L(Z, M^0 + \Delta M, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} \right. \\ &\quad \left. + Z_i \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + \Delta M_i \sum_{j=1}^n \lambda_j D_{ij} \right\} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{U}_{0j}(Z^0, M^0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

λ について最大化、 Z および ΔM について最小化することにより、近似設計問題の解を得ることができる。式(12)の Z および ΔM についての最小化問題は、トラスの各部材ごとに、各改良候補材種 (ΔM_i) についてその ΔM_i に対して必要となる Z_i を求め、式(12)の $\{ \}$ の値が最小となる ΔM_i と Z_i の組み合わせを求めることにより決定することができる。この場合、一般的には、すべての使用可能材種について比較することが考えられるが、これまでの研究により、 ΔM の範囲を M^0 と物理的性質が接近している隣接材種に限定する方が正しい解に収束させ得ることが明らかとなっている。また、式(12)を最大化する λ は、ニュートン法により決定す

ることができる。この改良解 $M^0 + \Delta M$ を再び初期値として同様の改良をくり返すことにより、最終的な最適解 M_{opt}, M_{opt} を得ることができる。(文献1参照)

4. 設計例

本研究においては、得られた解の最適性が明らかに判断できるようにするため、使用可能な材種 S_M として表-1に示すような材種を仮定し、この5種類の材種の中から各部材の最適な材種を選択するものとした。これらの材種の許容応力度、弾性係数および単価は、材種番号が大きくなる程たわみ制限に対して有利、かつ、応力制限に対して不利となるように設定している。

前節で述べたトラス構造物の最適設計アルゴリズムにより、種々の不静定トラスの最適設計を行い、本研究で提案している方法の最適性、計算効率、信頼性などについて検討を行った。その設計例を図-1～3、および表-2に示す。一般に、最適解が応力制限のみ、あるいはたわみ制限のみにより決定される場合には、図-1あるいは図-3に示すように、その最適材種

われている。一方、最適解における active な制約条件が応力制限およびたわみ制限の場合には、図-2に示すように使用材種 M および断面積 A (または S)が最適解の近傍で振動し、最終的な解を得るためには、振動する2組の M, S の組み合わせに対して M を固定し、それぞれの M に対する最適な S を求め、解を比較する必要がある。しかし、いずれの場合にも3部材トラスで7回程度、6,10部材トラスにおいて10回程度の反復改良で最適解を決定することができ、本研究の方法により、弾性係数、許容応力度および製作単価が異なる材種を選択もきわめてスムーズに行えることが明らかとなった。

表-1 使用可能材料の諸性質

材種 M	1	2	3	4	5
許容応力度 (kg/cm^2)	500	900	1200	1400	1500
弾性係数 (kg/cm^2)	1.2×10^4	2.8×10^4	4.8×10^4	7.2×10^4	1.0×10^5
単価 (円/ cm^3)	100	200	300	400	500
弾性係数/単価	1200	1400	1600	1800	2000
許容応力度/単価	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0

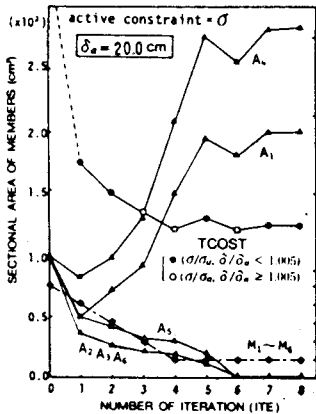


図-1 6部材トラスの収束過程

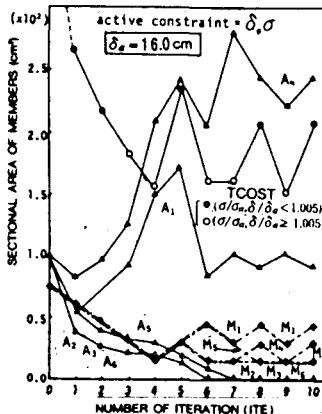


図-2 6部材トラスの収束過程

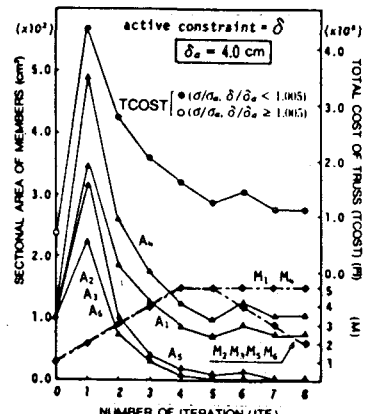


図-3 6部材トラスの収束過程

表-2 10部材トラスの初期値および最適値

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	TCOST(円)
$\delta_a = 6.0 \text{ cm}$											
初期値	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	116569x10 ⁴
最適値	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	656734x10 ⁴
$\delta_a = 16.0 \text{ cm}$											
初期値	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	582842x10 ⁴
最適値	140.25	198.39	0.10	0.10	280.45	198.31	0.10	0.10	94.25	198.33	295575x10 ⁴
$\delta_a = 40.0 \text{ cm}$											
初期値	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	582842x10 ⁴
最適値	89.11	92.10	0.10	0.10	178.18	125.98	0.10	0.10	125.94	283.31	219928x10 ⁴

1) M_i : 材種 2) A_i : 部材断面積 (cm^2) 3) TCOST: TOTAL COST OF TRUSS (円) 4) δ_a : active constraint

参考文献 1) 大塚健二、谷脇弘: Dual Approach によるトラス部材の最適割当の決定法について、構造工学論文集 Vol. 31A, 1985

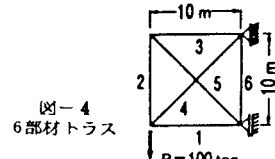


図-4 6部材トラス

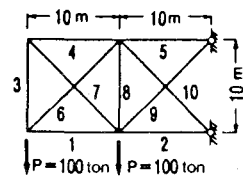


図-5 10部材トラス