都市部の測量における フリーネットワークの反復計算法について

広島工業大学 正員 岡野兼夫

都市部の用地測量は，地価の上昇にともない，精度の良いフリーネットワークによることが多くなりつつある。フリーネットワークは，1972年，ドイツのミッタマイヤーが創始したもので，与点・求点の区別無く全点に適正な座標修正を施して最高の精度を得ようとする解法である。しかしこの場合には，座標修正量を求める正規方程式 $NX=U$ が $|N|=0$ となり，何か新しい条件を附加しなければ解くことができない。そこで彼は根 x_i（座標修正量）に $\sum x_i^2 \to min$ の制約条件を与えて解くことに成功し，従来の解法にくらべて2倍～3倍の高精度が得られること を確認した。

しかし，これを土木測量に応用するには，ダムの変形測量・橋梁のスパン測量など局地座標系でよい場合には利用できるが，用地・地籍測量のように，国の統一座標系によらねばならないケースでは，与点（国土地理院の基準点）にも求点（新点）なみの座標修正が行なわれることが大きい欠点となる。 筆者はこの欠点を緩和すべく研究を続け，1981年に新しい附加条件 $\sum g_i x_i^2 \to min$ を提案し，これを用いたフリーネットワークの新法（岡野法第1解）を発表して以来，岡野法第2解・第3解などを次々に発表してきた。 いずれも $\sum g_i x_i^2 \to min$ を附加条件とする解であるが，この g_i は与点をも含めた各点の座標（新点は略近座標）に対する信頼度（重み）であり，$g_i \propto 1/|$座標修正量$|$ および $g_i \propto 1/|$地盤変動ベクトル$|$ で定義される"相対数"である。たとえば国土地理院の1次基準点網の精度は非常に良好であるから，当然その g は大きいとみなされる。《測量後あまり年数が経過していなければ，g_i の第2の定義は無視してよい》。そこで一般新点の重み $g_i=1$ に対して，与点（基準点）の重み $g \geqq 10$ として解けば，g の大きい点の座標修正量はミッタマイヤー解にくらべて一般に小さい値に収まる。しかし与点の適正な g 値を事前に定める方法が無く，いろいろな方法を研究した。

最初は，まず一律に $g_i=1$ として解き（結果はミッタマイヤー解と同じ），その座標修正量 x_i を用いて g_i を定義し，反復解で g_i を定め直す方法を試みたが，結果は適正な g_i を得るに至らず，与点の座標修正量を最小ならしめることができなかった。 そこで，$g_i=1$ の解と，g_i に各種異なる値を与えた解を比較したところ，下記の結論が得られた。

1) g_i の値をいろいろ変えれば座標修正量 x_i は変化するが，その変化値は $g_i=1$ の場合の x_i の値に一律な定数 Δx を与えた値 $\bar{x}_i = x_i + \Delta x$ となる。そしてこの Δx を先に定めて得た $\bar{x}_i$ で g_i を定義すれば，反復解で妥当な結果を得られることが判明した。

2) g_i に異なる値を与えれば，同一点について異なる座標修正量 x_i が得られるが，この x_i を観測方程式へ代入し，観測量の補正量 v_i を計算してみると全く同じ v_i を得ることがわかった。したがって標準誤差計算に用いる v_i は $g_i=1$ の解で求めた値でよい。

◎以上を踏まえて，用地測量のフリーネットワークについて，1回の計算で完結し，しかも与点に対する座標修正量を最小に止める解法はつぎのようになる。《ブロックどうしの接合を考えない場合は反復は不要である》。

1. $g_i=1$ と置いて岡野法第1解および第2解により座標修正量 x_i を計算する。正規行列Nのランク F は第2解で定まるが，その F が正しいか否かは，ランクと無関係な第1解の x_i と，第2解の x_i が一致するか否かで判定される。（第1解と第2解の小さい差は平均しておけばよい。ランク F の値は $g_i=1$ でも $g_i \neq 1$ でも同じ値となるべきである）。ここで観測の重み $p=1$ の観測量に対する標準誤差 $\sigma_0=\sqrt{[pvv]/(m-F)}$ を計算しておく。

m：観測式数 ，p_i：各観測式の観測項の重み ，v_i：x_i を観測式へ代入して計算した観測量の補正量

2. 与点のうち座標修正量（絶対値）が 6 cm 以上を示す点は新点として扱う。《20 cm 以上を示す点は事故点として除外し，計算をやり直す》。座標修正量 6 cm 未満の与点について，X座標修正量の平均値 Δx とY座標修正量の平均値 Δy を求める。（もちろん代数平均である）。つぎに与点・求点全点の座標修正量に一律に $-\Delta x$ と $-\Delta y$ を補正する。（X座標修正量 $-\Delta x$ ，Y座標修正量 $-\Delta y$）。これで与点の座標修正量は最小となったので，与点を含む全点に改訂修正量 $\bar{x}_i = x_i - \Delta x$（または $-\Delta y$）を与えて改訂座標を求め，観測式の観測項を改算し，正規式の定数項 U を改訂する。（正規行列 N は変らない）。つぎに全点の座標の信頼度 g_i につき $g_i = |\bar{x}_{max}| / |\bar{x}_i|$ と定義する。《分子に最大修正量を置くことにより，修正が最も大きい点の $g=1$ として $g_i \geqq 1$ ならしめることになる。ただし $g_i \leqq 100$ とする。— 100 以上の g_i は 100 と置く。》

3. この g_i を用いて改訂正規式 $NX=U$ を岡野法第3解で解き＊，第2次修正量 $X = N_D^{-1}U$ を求めて座標の最終改正を行なうと共に，標準誤差（楕円誤差）計算に必要な Q_x 行列 $Q_x = N_D^{-1} N N_D^{-1}$ を得ることができる。《正規式の根は $X = Q_x U$ でも求まるから，同じ根を得れば Q_x が正しい保証になる。》 ＊下の《註》参照
もちろん，与点の座標値に関しては，国の成果表の次の改訂期まで成果表のままとし，修正量を付記すればよい。ただし，最初の解の修正量が 20 cm を越えた与点は事故点？として届出る必要があろう。

◎ 接合点が存在する場合の反復解（フリーネットワークのブロックを接合点でつなぐ場合の解法）

実際の用地測量では，測量ブロックどうしの接合点（共通点）が問題になる。すなわち接合点に両側のブロックから異なる座標修正が与えられる現象を何とかしなければならない。そこで接合点としてなるべく国の基準点を利用して両側のブロックを上記のようにまとめるべきであるが，止むなく一般点を接合点とする場合も出てくるであろう。以下にその場合の方針を述べる。 **1.** これは上記の **1.** と全く同じでよい。 **2.** もほぼ同じであるが，改訂座標を求める際に，接合点の最確修正量として，両側ブロックの与点の修正量を最小ならしめた場合の接合点修正量 $\bar{x}_j$ と $\bar{x}_j'$ の平均値を採用する。したがって接合点の $g_j = 2|\bar{x}_{max}| / |\bar{x}_j + \bar{x}_j'|$ となる。一般点には修正量 $\bar{x}_i$ をそのまま与えるので $g_i = |\bar{x}_{max}| / |\bar{x}_i|$ とする。与点に対しては最確修正量 $\bar{x}_{0i}$ の 1/2 を修正することにして $g_{0i} = 2|\bar{x}_{max}| / |\bar{x}_{0i}|$ とおく。 **3.** これらの g を用いて改訂正規式を岡野法第1解で解き **2.** へ戻って反復する。そうして最大修正量 $\bar{x}_{max} < 1$ cm となれば打切り，岡野法第3解によって Q_x 行列を求め標準誤差を計算すればよい。むやみに反復しても効果は無いので，$\bar{x}_{max}$ がいちばん小さくなった回で打切るべきである。

《註》 座標の重み g_i を用いる岡野法第3解

3元 例 $NX=U \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$，$|N|=0$

$N_D = \begin{bmatrix} a_{11}+g_1\delta & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+g_2\delta & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+g_3\delta \end{bmatrix}$

N_D の逆行列 N_D^{-1} を用い $X = N_D^{-1}U$，$Q_x = N_D^{-1} N N_D^{-1}$，$X = Q_x U$ 　 $\delta = (0.1)^t \sqrt[3]{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}}$，t：計算桁の$\frac{1}{2}$

根 x_i の標準誤差 $\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{\alpha_{ii}}$，$\alpha_{ii}$ は Q_x の対角要素，$\sigma_0 = \sqrt{[pvv]/(m-F)}$：本文に述べた，単位重み観測量の標準誤差

---

g_i を用いる岡野法 第1解 　 3元なら上の正規式につき

（N の最後の行と列を除いた行列を B とし，B_δ の逆行列 B_δ^{-1} を求める。） $B_\delta = \begin{bmatrix} a_{11}+\delta & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+\delta \end{bmatrix}$，$B_\delta^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$

$A_i = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$ 　 $B_i = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

最後の根をまず求める。

$$x_3 = \frac{A_1 \cdot B_1 \cdot g_1 + A_2 \cdot B_2 \cdot g_2}{A_1^2 \cdot g_1 + A_2^2 \cdot g_2 + g_3}$$

x_3 を用い，他のすべての根を得。
$x_1 = B_1 - (x_3)A_1$
$x_2 = B_2 - (x_3)A_2$

δ は第3解の δ と同じ。B の対角要素に δ を加えれば，B が不正則でも解ける。

---

g_i を用いる岡野法 第2解

3元 例 $NX=U \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$，$|N|=0$

正規式の各行にパラメータ K_i を考え，正規式からパラメータ正規式を作る。

$$\begin{cases} \left[\frac{aa}{g}\right]K_1 + \left[\frac{ab}{g}\right]K_2 + \left[\frac{ac}{g}\right]K_3 = u_1 \\ \left[\frac{ab}{g}\right]K_1 + \left[\frac{bb}{g}\right]K_2 + \left[\frac{bc}{g}\right]K_3 = u_2 \\ \left[\frac{ac}{g}\right]K_1 + \left[\frac{bc}{g}\right]K_2 + \left[\frac{cc}{g}\right]K_3 = u_3 \end{cases}$$

定数項はもとの正規式のままとして，左辺係数を単位行列化する操作（掃き出し）を右辺にも同時に行ない，対角要素が零になったところ以下を抹消して有効なパラメータの値を決定する。たとえば $\left[\frac{cc}{g}\right]' = 0$ となれば（′は掃き出し変換値を意味する）

$$\begin{cases} 1K_1 + 0K_2 = u_1' \\ 0K_1 + 1K_2 = u_2' \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 = u_1' \\ K_2 = u_2' \end{cases} \quad K_3 = 0 \text{ とみなす.}$$

パラメータ正規式からパラメータの値が定まれば $x_i = (a_i K_1 + b_i K_2 + c_i K_3) / g_i$

《参考文献》解法の詳細は下記の広島工業大学研究紀要を参照されたい。

①，②は1982年，土木学会中国・四国支部講演会に概要発表

岡野兼夫：測量における不正則正規方程式の新しい解法：広工大"紀要" No. 20，pp. 191〜197（1982年3月）①
岡野兼夫：測量におけるフリーネットワークの実用法：広工大"紀要" No. 21，pp. 151〜161（1983年3月） ②
岡野兼夫：測量における近似フリーネットワーク計算法：広工大"紀要" No. 22，pp. 187〜193（1984年3月）③