

クラックを有する材料の力学特性とその表現

福山大学 工学部 正員 西原 晃

1 はじめに

岩質材料はこれまで多く連続体として取り扱われてきた。しかし実際の岩盤にはクラックなどの不連続面が存在し、またこのような不連続面は岩盤の全体としての力学特性に大きく影響する。このような不連続面の評価法としては、これまでにもき裂頻度やR.Q.D.といったき裂の量に関する指標が提案されており、また最近では、Kachanov¹⁾、小田²⁾らによって、クラックをテンソル量として取り扱おうとする試みもなされている。クラックをテンソル量として表現する方法は、それまでの単なる量的評価法に比べ、クラックの方向性による岩盤の異方性をも表現しうる有効な方法であるが、クラックの状態に関する詳細な情報を必要とする。そこで本報告では、岩盤の任意の面で観察されるクラックの状態から容易に求めることのできるベクトルを新たに導入し、このベクトルを用いて、クラックを有する岩質材料の力学特性を表現する方法について考察した。

2. クラックベクトル

岩盤の任意の面で観察されるクラックのそれぞれに、そのクラックの長さと同じ大きさを持ち、クラックに立てた単位法線ベクトルの方向を向いたベクトル $\underline{\varepsilon}_i = l_i n_i$ を対応させる (Fig. 1)。ここに、 l_i および n_i はそれぞれ各目のクラックの長さとその単位法線ベクトルである。ここで、

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^m l_i n_i \quad (1)$$

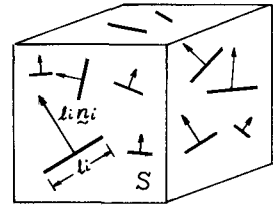


Fig. 1 クラックベクトル

で定義されるベクトルを導入する。 S および m は観察面の面積とクラックの本数であり、したがって $\underline{\varepsilon}$ は単位面積の観察面に含まれるクラックの合ベクトルを表している。ベクトル $\underline{\varepsilon}$ のトレース $\text{tr } \underline{\varepsilon} = 1/S \sum l_i \text{tr } n_i = 1/S \sum l_i$ は従来よく用いられてきたき裂頻度を表しており、クラックの量に関する指標となる。ここではベクトル $\underline{\varepsilon}$ をクラックベクトルと呼ぶことにする。

一般にクラックを含む岩質材料は、クラックの影響により、その力学特性が劣化するとともに異方性を示すようになる。矢富・西原³⁾によれば、このような異方性材料の力学特性は、材料の方向性を特徴づけるベクトルあるいはテンソルを用いてたとえば、 $\underline{\varepsilon} = \underline{F}(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon})$ の形で表される。ここで $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ は材料の方向性を特徴づけるベクトルおよびテンソルであり、それぞれ基準ベクトル、基準テンソルと呼ばれる。クラックベクトルはクラックの方向を特徴づけるものであり、1種の基準ベクトルと考えることができる。したがって、クラックを含む材料の応力-ひずみ関係を $\underline{\varepsilon} = \underline{F}(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon})$ (2) の形で表すことにする。矢富・西原によれば、式(2)の関数 $\underline{F}$ は $\underline{\sigma}$ および $\underline{\varepsilon}$ の等方関数でなければならず、その一般形は

$$\underline{\varepsilon} = \alpha_1 \underline{1} + \alpha_2 \underline{\sigma} + \alpha_3 \underline{\sigma}^2 + \alpha_4 \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon} + \alpha_5 (\underline{\varepsilon} \otimes \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon}) + \alpha_6 (\underline{\varepsilon} \otimes \underline{\sigma}^2 \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^2 \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon}) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、記号 $\otimes$ はテンソル積を表し、係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ は $\underline{\sigma}$ と $\underline{\varepsilon}$ に関する不変量

$$\text{tr } \underline{\sigma}, \text{tr } \underline{\sigma}^2, \text{tr } \underline{\sigma}^3, \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma} \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma}^2 \underline{\varepsilon} \quad (4)$$

のスカラ関数である。今、関数 $\underline{F}$ が応力に関して1次、すなわち線形弾性を考えると、その一般形は

$$\underline{\varepsilon} = \beta_1 \text{tr } \underline{\sigma} \underline{1} + \beta_2 \underline{\sigma} + (\beta_3 \text{tr } \underline{\sigma} + \beta_4 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma} \underline{\varepsilon}) \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon} + \beta_5 (\underline{\varepsilon} \otimes \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon}) \quad (5)$$

あるいは

$$\varepsilon_{ij} = \beta_1 \sigma_{mm} \delta_{ij} + \beta_2 \sigma_{ij} + (\beta_3 \sigma_{mm} + \beta_4 \sigma_{kl} c_{kl}) c_{ij} + \beta_5 (c_{ij} \sigma_{kl} c_{kl} + \sigma_{ik} c_{kj}) \quad (6)$$

で与えられる。 $\beta_1, \dots, \beta_5$ は実験によって決められる定数である。クラックがない場合 ($\underline{\varepsilon} = \underline{0}$) には式(6)は

$\varepsilon_{ij} = \beta_1 \sigma_{mm} \delta_{ij} + \beta_2 \sigma_{ij}$ となり、 $\beta_1 = -\nu/E$, $\beta_2 = (1+\nu)/E$ であることがわかる。

クラックベクトルは、応力-ひずみ関係だけでなく、その他の力学特性の表現にも適用できる。たとえば、破壊条件も $f(\sigma, \varepsilon) = a$ (a : 実験定数) (7) の形で表すことができる。スカラー関数 f は σ と ε の等方関数でなければならず、式(4)に示す不変量の関数である。今、 f が応力に関して2次であるとする、その一般形は

$$\varphi_1 \text{tr}^2 \sigma + \varphi_2 \text{tr} \sigma^2 + \varphi_3 \varepsilon \cdot \sigma \varepsilon \text{tr} \sigma + \varphi_4 \varepsilon \cdot \sigma^2 \varepsilon + \varphi_5 (\varepsilon \cdot \sigma \varepsilon)^2 = a \quad (8)$$

で与えられる。ここに、 $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ は実験定数である。クラックがない場合には式(8)は $\varphi_1 \text{tr}^2 \sigma + \varphi_2 \text{tr} \sigma^2 = a$ となる。 $\varphi_1 = 3$, $\varphi_2 = 1/3$ とおいたもの $3 \text{tr}^2 \sigma + 1/3 \text{tr} \sigma^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = a$ はよく知られたミーゼスの破壊条件である。

3. 実験による検証

クラックベクトルの適用性を調べるために、Fig. 2 に示すように、5×5×10 (cm) の石コウに長さの等しいクラックを平行にいろいろな角度で入れた供試体を用いて一軸圧縮試験を行った。クラックの長さは3cmと1.5cmの2種類で、本数は2本と4本の2種類である。クラックの方向は、Fig. 2 の角度 θ を0から90度まで15度づつ変化させている。Fig. 2 に示すように座標軸をとり、 y 軸方向に圧縮する場合、応力-ひずみ関係は式(6)より

$$E_y = \{ \beta_1 + \beta_2 + (\beta_3 + 2\beta_5) C_y^2 + \beta_4 C_y^4 \} \sigma_y = 1/E \{ 1 + \bar{\beta}_1 C_y^2 + \bar{\beta}_2 C_y^4 \} \sigma_y \quad (9)$$

となる。 C_y は ε の y 方向成分であり、長さ l のクラックが N 本あるとすれば $C_y = N l \sin \theta / S$ で与えられる。クラックがある場合の弾性係数を E_c とすれば式(9)より、

$$\frac{E_c}{E} = \frac{1}{1 + \bar{\beta}_1 C_y^2 + \bar{\beta}_2 C_y^4} \quad (10)$$

となる。Fig. 3 は式(10)で $\bar{\beta}_1 = 32$, $\bar{\beta}_2 = 0$ とおいて計算した結果と実験結果を比較したものである。 C_y の値は一般に小さく、したがって C_y^2 の項までで十分実験結果を説明できるであろう。

一方、一軸圧縮試験の場合、破壊条件は式(8)より

$$\{ \varphi_1 + \varphi_2 + (\varphi_3 + \varphi_4) C_y^2 + \varphi_5 C_y^4 \} \sigma_y^2 = \bar{\varphi}_0 (1 + \bar{\varphi}_1 C_y^2 + \bar{\varphi}_2 C_y^4) \sigma_y^2 = a \quad (11)$$

と表される。クラックがない場合とある場合の圧縮強度は式(11)より、

$$\bar{\sigma} = \sqrt{a/\bar{\varphi}_0}, \quad \bar{\sigma}_c = \sqrt{a/\bar{\varphi}_0 (1 + \bar{\varphi}_1 C_y^2 + \bar{\varphi}_2 C_y^4)}$$

と表されるので、

$$\frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \bar{\varphi}_1 C_y^2 + \bar{\varphi}_2 C_y^4}} \quad (12)$$

となる。Fig. 4 は $\bar{\varphi}_1 = 240$, $\bar{\varphi}_2 = 0$ とおいて計算した結果と実験結果を比較したものである。Fig. 3, 4 の結果より、クラックベクトルという簡単に求めることのできるベクトルでクラックを含む材料の力学特性をある程度表現できるようである。ただし、式に含まれる $\bar{\beta}$, $\bar{\varphi}$ などの係数をどう求めるかは今後の課題である。

参考文献

- 1) Kachanov, M.: "Continuum model of medium with cracks," Proc. ASCE, Vol. 106, EM5, 1980
- 2) Oda, M.: "Fabric tensor for discontinuous geological materials," Soils and Foundations, Vol. 22, No. 4, 1982
- 3) Yatomi, C. and Nishihara, A.: "Principles for constitutive equations and expressions of anisotropy in Soil materials," Soils and Foundations (to appear)

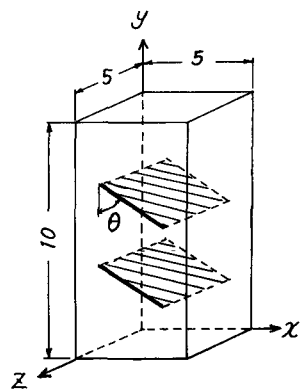


Fig. 2 石コウ供試体

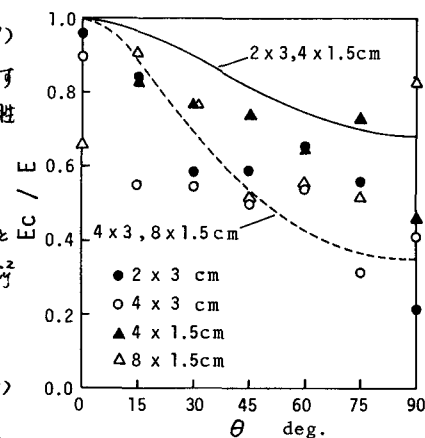


Fig. 3 クラックと弾性係数の関係

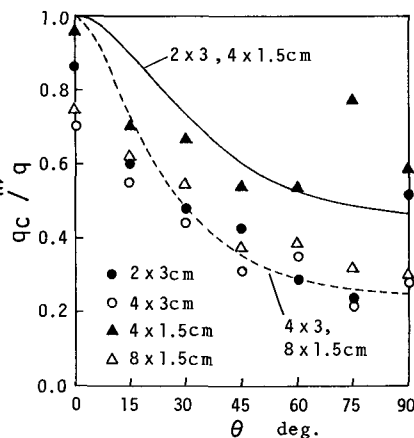


Fig. 4 クラックと圧縮強度の関係