高速弯曲流の解析に関する定式化

広島大学工学部　正　員○細　田　尚
広島大学工学部　正　員　余越正一郎

1. 序　論

高速弯曲流に関しては、von Kármán の理論[1]が有名であるが、本研究では von Kármán の解のような水路外岸での水深のみならず、流れの全域にわたっての特性を検討するための一段階として、特性曲線法による解析の定式化を試みる。定常な平面流れの基礎式は、その特性曲線より、平面流れの Froude 数が1より大か小かによって双曲型と楕円型に分類される[2]が、本研究では流れが全域にわたって双曲型のときを考え、さらに、固定格子点の特性曲線法を用いるため、同種の特性曲線の交差による衝撃波の発生がない流れを取り扱う。

2. 基礎式と特性曲線

基礎式は円柱座標系で次のように表わされる。(Fig.1)

$$\mathbb{A}_1 \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial r} + \mathbb{A}_2 \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \theta} = \mathbb{B} \qquad (1)$$

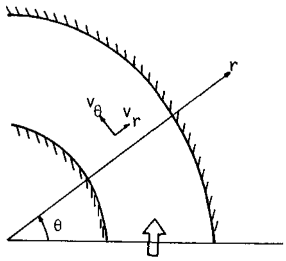

Fig.1 座標系

ここに

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} r v_r, & rh, & 0 \\ g, & v_r, & 0 \\ 0, & 0, & v_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} v_\theta, & 0, & h \\ 0, & \frac{v_\theta}{r}, & 0 \\ \frac{g}{r}, & 0, & \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -v_r h \\ \frac{v_\theta^2}{r} \\ -\frac{v_r v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

(ξ, η) 系への座標変換を考え、η 上(ξ = 一定)で $\mathbb{U}$ の値と $\mathbb{U}$ の η 方向の微係数が与えられたとき、ξ 方向の微係数が定まらない条件が特性条件とよばれ[3]

$$\left(\mathbb{A}_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \mathbb{A}_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \xi} + \left(\mathbb{A}_1 \frac{\partial \eta}{\partial r} + \mathbb{A}_2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right) \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \eta} = \mathbb{B}$$

より

$$\det \left| \mathbb{A}_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \mathbb{A}_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right| = 0 \qquad (2)$$

で表わされる。

(2)式より、特性曲線は $\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1$ の固有値であって

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{v_r}{v_\theta}, \quad \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \pm \frac{\sqrt{gh}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} \qquad (3)$$

となる。第一式は流線を表わしている。

3. 特性曲線上の関係式[3]

次に(3)式の各々に対応する $\mathbb{A}_2^{-1}\cdot\mathbb{A}_1$ の左固有ベクトルを求めると次のようになる。

$$\eta \quad \frac{dr}{r d\theta} = \frac{v_r}{v_\theta}\ ; \quad \mu_1 = \left(1, \ \frac{v_r}{g}, \ \frac{v_\theta}{g}\right)$$

$$\xi_+ \quad \frac{dr}{r d\theta} = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} + \frac{\sqrt{gh}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}\ ; \quad \mu_2 = \left(1, \ \frac{\sqrt{h}\, v_\theta}{\sqrt{g}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}, \ \frac{-\sqrt{h}\, v_r}{\sqrt{g}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}\right) \qquad (4)$$

$$\xi_- \quad \frac{dr}{r d\theta} = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} - \frac{\sqrt{gh}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}\ ; \quad \mu_3 = \left(1, \ \frac{-\sqrt{h}\, v_\theta}{\sqrt{g}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}, \ \frac{\sqrt{h}\, v_r}{\sqrt{g}\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}\right)$$

固有ベクトル$\mathbb{K}_i$を $\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1\dfrac{\partial U}{\partial r}+\mathbb{I}\dfrac{\partial U}{\partial\theta}=\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{B}$

に左より乗ずることにより、特性曲線上で成立する関係式

$$\mathbb{K}_i\left(\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1\frac{\partial\eta}{\partial r}+\mathbb{I}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)\frac{\partial U}{\partial\eta}=\mathbb{K}_i\left(\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1\frac{\partial U}{\partial r}+\mathbb{I}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{\xi=const.}=\mathbb{K}_i\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{B}\tag{5}$$

が得られる。ここに、

$$\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{v_r v_\theta}{v_\theta^2-gh} & \dfrac{h v_\theta}{v_\theta^2-gh} & \dfrac{-h v_r}{v_\theta^2-gh}\\[2ex] \dfrac{g}{v_\theta} & \dfrac{v_r}{v_\theta} & 0\\[2ex] -\dfrac{g v_r}{v_\theta^2-gh} & -\dfrac{gh}{v_\theta^2-gh} & \dfrac{v_r v_\theta}{v_\theta^2-gh}\end{pmatrix},\quad \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{B}=\begin{vmatrix}0\\[2ex] \dfrac{v_\theta}{r}\\[2ex] -\dfrac{v_r}{r}\end{vmatrix}$$

である。

4. 固定格子点の特性曲線法

固定格子点の特性曲線法は境界条件の与え方が水理学的であることより、同種の特性曲線の交差が生じない、緩慢な開水路非定常流に用いられ成果を収めてきた[4]。本研究でも特性曲線網による解析は困難であるので、固定格子点での特性曲線法による差分化を行なう。ただし、流れは全域にわたって双曲型であり、かつ衝撃波が存在しないときに限られる。

Fig. 2 を参照して、特性曲線に沿った微係数が次のように近似される。

ζ^+;

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}\approx\frac{U_j^{n+1}-U_B}{d\theta}\approx\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{d\theta},\qquad U\approx\frac{U_j^n+U_{j-1}^n}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}\approx\frac{U_j^{n+1}-U_B}{dr_+}\approx\frac{U_j^n-U_B}{dr_+}\approx\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{dr_l}$$

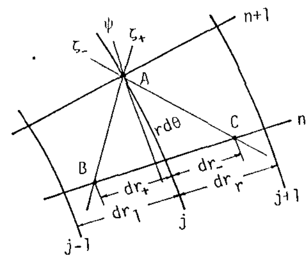

Fig. 2 差分格子

よって、ζ^+上で

$$(\mathbb{K}_2)_j^n\left((\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1)_j^n\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{dr_l}+\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{r\,d\theta}\right)=(\mathbb{K}_2)_j^n(\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{B})_j^n\tag{6-a}$$

となる。ζ^-上でも同様に

ζ^-;

$$(\mathbb{K}_3)_j^n\left((\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}_1)_j^n\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{dr_l}+\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{r\,d\theta}\right)=(\mathbb{K}_3)_j^n(\mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{B})_j^n\tag{6-b}$$

となる。

一方、流線上の関係式はそのまま用いずに、非定常な平面流れのばあいの特性曲線法[5]で用いられているように連続式をそのまま差分化する。

$$\frac{v_{\theta j}^n}{r}\frac{h_j^{n+1}-h_j^n}{d\theta}+\frac{h_j^n}{r}\frac{v_{\theta j}^{n+1}-v_{\theta j}^n}{d\theta}+h_j^n\frac{v_{r\,j+1}^n-v_{r\,j-1}^n}{dr_l+dr_r}+v_{r\,j}^n\frac{h_{j+1}^n-h_{j-1}^n}{dr_l+dr_r}+\frac{(v_r h)_r^n}{r}=0\tag{7}$$

側壁での境界条件としては、側壁では$v_r=0$より連続式から$h v_\theta=$一定$(=h_0 v_{\theta_0})$となり、これと側壁よりおろしたζ^+あるいはζ^-上の関係式よりv_θ, hが求められる。

以上、(6), (7) 式より原理的には流れの解析が可能であり、今後、数値解析的な検討を行ないたい。

(参考文献)

1) 例えば 岩佐;水理学,朝倉書店,2) 細田,余越;第28回水理講演会論文集,1984,3) 谷内,西原;非線形波動,岩波書店,4) 岩佐・井上・片山;京大防災年報19号 B-2,5) 岩佐・井上・吉田;京大防災年報24号 B-2