条件付確率降雨波形と条件付確率降雨強度曲線の提案

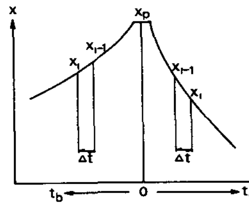
徳島大学工学部　正員　端野道夫
徳島大学大学院　学生員　桑田康雄

1．はしがき

降雨強度式として，Talbot 型等,種々の形の経験式が提案されているが，前提となる経験式形に対する確率統計学的考察はほとんどされていない。[1] 本文は Freund の二変数指数型分布より，ピーク雨量が与えられたときの条件付確率降雨波形を理論的に誘導し，従来の経験式にかわる実用的な条件付確率降雨強度式を提案するものである。降雨資料としては入手の容易な1時間単位資料を用い，5分から6時間程度の降雨継続時間を対象とする。

2．Freund の二変数指数型分布と条件付確率降雨波形

図－1のような，一つのピークをもつ山型降雨を考え，時間軸はピーク時を基準に，ピーク前，後で変え，単位時間Δt前，後の降雨強度をx_{i-1}, x_iとする。二変数x_i, x_{i-1}の周辺分布は同一であるとして，Freundの二変数指数型分布[2]を適用すれば，その確率密度関数$f(x_i, x_{i-1})$は(1)式で与えられる。図－1のような一山型降雨を考えているから，ピーク前，後ともピーク時より時間がたつにつれ降雨強度は単調減少する。すなわち，$x_i < x_{i-1}$として良い。この条件下に，条件付確率$F(x_i|x_{i-1})$を(1)式より求めると(2)式が得られる。ところで，パラメータ$\alpha, \beta\ (>0)$とxの平均m_x，分散σ_x^2，自己相関係数ρの間には(3)～(5)式の関係がある。



図－1

$$f(x_i,x_{i-1})=\begin{cases}\alpha\beta\exp\{-\beta x_{i-1}-(2\alpha-\beta)x_i\}, & (0<x_i<x_{i-1})\\ \alpha\beta\exp\{-\beta x_i-(2\alpha-\beta)x_{i-1}\}, & (0<x_{i-1}<x_i)\end{cases} \tag{1}$$

$$F(x_i|x_{i-1})=\begin{cases}\dfrac{1-\exp\{-(2\alpha-\beta)x_i\}}{\{1-2(1-\frac{\alpha}{\beta})\exp\{-(2\alpha-\beta)x_{i-1}\}}, & (2\alpha\neq\beta)\\ & (x_i<x_{i-1})\\ \beta x_i/(1+\beta x_{i-1}), & (2\alpha=\beta)\end{cases} \tag{2}$$

$$m_x=(\alpha+\beta)/2\alpha\beta \quad (3) \qquad \sigma_x^2=(3\alpha^2+\beta^2)/4\alpha^2\beta^2 \quad (4)$$

$$\rho=\{1-(\alpha/\beta)^2\}/\{1+3(\alpha/\beta)^2\} \quad (5) \qquad y=(x-u)/\sigma_u \quad (6)$$

$$\begin{cases}\exp(-\lambda y_i)=(1-F)+2F\cdot(1-k)\cdot\exp(-\lambda y_{i-1}), & (k\neq 1/2)\\ y_i=\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot F+F\cdot y_{i-1}, & (k=1/2)\end{cases} \tag{7}$$

ただし，$k\equiv\alpha/\beta$，$F\equiv F(y_i|y_{i-1})$
$\lambda\equiv(2k-1)\sqrt{3k^2+1}/2k$

$$dY/dt = A + BY, \quad (t \geqq \Delta t/24) \tag{8}$$

$$t=\Delta t/24 \text{ にて } Y=Y_p=\begin{cases}\exp(-\lambda y_p), & (k\neq 1/2)\\ y_p, & (k=1/2)\end{cases} \tag{9}$$

xを(6)式のような無次元量yに変換する。(6)式中uは分布あてはめの付加定数，σ_uは$(x-u)$の標準偏差とすれば，yの分散σ_y^2，すなわち(4)式の右辺は1に等しい。この条件を用い，(2)式をy_iについて書き直せば(7)式を得る。(7)式より明らかなように，y_i, ($i=1,2,\cdots$)を規定するパラメータはk（またはρ）と条件付確率Fおよびピーク値（yの初期値）である。条件付確率Fは実際の現象では時々刻々変化するが，本研究の目的である計画降雨波形の確率的設定の立場から，ピーク前で$F=F_b$=一定，ピーク後で$F=F_a$=一定，と単純化することが許されよう。このような，ピーク雨量が与えられたときの等条件付確率降雨波形を略して，条件付確率降雨波形と呼ぶことにする。なお，自己相関係数ρは実用的には$0\leqq\rho<1$の範囲を考えれば良いだろうから，$k(\equiv\alpha/\beta)$の範囲として$0<k\leqq 1$を考えれば良いことが(5)式より明らかである。

3．条件付確率降雨波形の連続化

(7)式で与えられる条件付確率降雨波形は時間間隔Δtの離散値y_i, ($i=1,2,\cdots$)についてであり，後述の条件付確率降雨強度曲線の定式化に不便であるので，(7)式と等価な連続時間tに関する式に変換する。この連続化は利用資料の単位時間Δtよりも短時間の降雨強度の推定も可能にする。いま，(8)式のようなYに関する微分方程式(A, B：定数)を考え，その一般解に(9)式の初期条件を付ける。これと(7)式が等価であるための，他の制約条件の有無を検討し，ピーク雨量y_p ($t=\Delta t/24$)をもつ条件付確率降雨波形（のピーク前，後のいずれか片側波形）を与える，連続時間tについての式をまとめると(10)式のようになる。$y_p=10$, $F=0.5$で，いくつかのk値についてyを(10)

式より計算すると図－2のようであり，kが1に近づくほど，すなわちρが0に近づくほど降雨波形は急峻となる。

4. 条件付確率降雨強度曲線とその近似式

図－3のように，ピーク前，後の降雨強度の等しい時点の時間間隔を$\tau=\tau_a+\tau_b$とすると，τ時間内の平均降雨強度r^*は(11)式で与えられる。(11)式中y_b, y_aはそれぞれピーク前，後の時間t_b, t_aにおける降雨強度yで，(10)式で$F=F_b$，$F=F_a$とおくことにより計算される。したがって，(11)式の積分項を積分すれば，(y_p, k, F_b, F_a)が与えられたときの条件付確率降雨強度曲線（$r^*\sim\tau$関係）が得られることになる。しかし，積分項は$k=1$, $\frac{1}{2}$の場合を除いて初等関数では表わせず，数値積分によらざるを得ない。図－4は$y_p=10$，$F_b=F_a=0.5$でk値のいくつかの場合についてSimpsonの数値積分法により得られた条件付確率降雨強度曲線（$r^*\sim\tau^*=\tau/\Delta t$）である。一般に，降雨強度曲線は，両対数紙上で直線ないし上に凸の形をとることが報告されているが，本理論曲線はこうした事例をも十分説明することができる。

i) $k \neq 1/2$ のとき（$0<\rho<1$，$\rho\neq 3/7$）

$$
\left.
\begin{aligned}
&\exp(-\lambda y)-\delta=\{\exp(-\lambda y_p)-\delta\}\cdot\exp\{Bt-\tfrac{B\Delta t}{24}\}\\
&\delta\equiv(1-F)/\{1-2F\cdot(1-k)\},\quad B\equiv\Delta t^{-1}\cdot\ln\{2F\cdot(1-k)\}\\
&\lambda\equiv(2k-1)\sqrt{3k^2+1}/2k,\quad -\lambda^{-1}\ln\delta<y\leqq y_p\\
&0<k<1/2\ \text{のとき}\ 0<F\leqq 1/2,\quad 1/2<k<1\ \text{のとき}\ 0<F<1
\end{aligned}
\right\}\quad(10\text{-}1)
$$

ii) $k=1/2$ のとき（$\rho=3/7$）

$$
\left.
\begin{aligned}
&y-\delta=(y_p-\delta)\exp\{Bt-\tfrac{B\Delta t}{24}\}\\
&\delta\equiv\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{F}{(1-F)},\quad B\equiv\Delta t^{-1}\cdot\ln F\\
&\delta<y<y_p,\quad 0<F<1
\end{aligned}
\right\}\quad(10\text{-}2)
$$

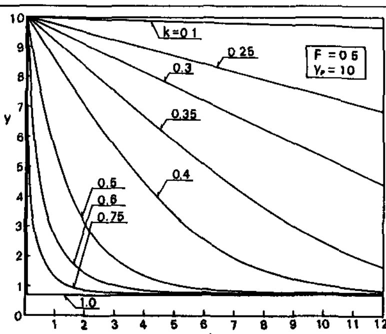
iii) $k=1$ のとき（$\rho=0$）

$$
\left.
\begin{aligned}
&y=\begin{cases} y_p, & (t=\Delta t/24)\\ -\ln(1-F), & (t>\Delta t/24)\end{cases}\\
&-\ln(1-F)<y_p,\quad 0<F<1
\end{aligned}
\right\}\quad(10\text{-}3)
$$

$$
r^*=\left[y_p\frac{\Delta t}{12}+\int_{\Delta t/24}^{\tau_b}y_b\,dt+\int_{\Delta t/24}^{\tau_a}y_a\,dt\right]\Big/\tau \qquad (11)
$$

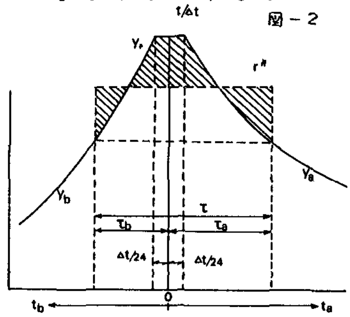
$$
r^*=\frac{a^*\,(r_1^*-c^*)}{\tau^{*m}+b^*}+c^* \qquad (12)
$$

さて，(10),(11)式を実際に用いることは式が煩雑ゆえ不適当である。したがって，従来の経験式程度の簡単な近似（条件付確率降雨強度）式として，$k=1$の場合の式形（省略）を参考に，(12)式を提案する。(12)式中，r_1^*は計画確率年Tに対する基準1時間雨量の無次元化量であり，(y_p, k, F_a, F_b)によって規定される。定数c^*は(10)式におけるyの下限値で定義され，kと$F_m=\mathrm{Max}(F_a, F_b)$の関数で与えられる。定数$a^*$, b^*, mは(y_p, k, F_a, F_b)はもちろんのこと，対象とする降雨継続時間$\tau^*\equiv\tau/\Delta t$によっても異なるので，$\tau^*$を，$1/12\leqq\tau^*\leqq1$，$1\leqq\tau^*\leqq6$の2領域に分け，それぞれの時間領域について，(10),(11)式による厳密解を(12)式で近似し，(y_p, k, F_a, F_b)の組み合わせに対する定数a^*, b^*, mを求めておく。



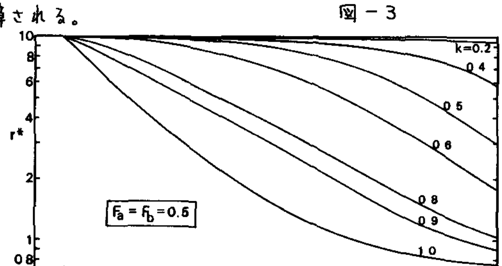
図－2

条件付確率降雨強度式(12)の利用手順の概要を以下に記す。①時間雨量資料の解析よりk（またはρ）と計画確率年Tに対するr_1^*を計算する。②計画降雨波形の条件付確率F_a, F_bを設定する。またk, F_a, F_bよりc^*を決定する。③数表または回帰式によりr_1^*, k, F_a, F_bに対するy_pを求めれば条件付確率降雨波形（(10)式における$y\sim t$関係）が決定される。④数表または回帰式により，対象とする時間領域（前述の2領域のいずれか）のa^*, b^*, mを求めれば所要のτ^*に対するr^*が(12)式より計算される。



図－3

(10),(11)式による厳密解を(12)式で近似しての定数a^*, b^*, mの求め方，前述の利用手順③,④での数表または回帰式，その他の詳細については別の機会に発表したい。



図－4

参考文献

1) 長尾正志：水文統計における多変数確率分布理論－二変数統計を中心として－，水工学に関する夏期研修会講義集，Aコース，A-4，1975.

2) Freund, J.E：A bivariate extension of the exponential distribution, Jour. American Statistical Association, Vol. 56, 1961, pp. 971-977.

3) 土木研究所：計画降雨に関する研究，第25回建設省技術研究会報告，昭.46年度，pp. 459-482.