

板のクラック周辺の解析手法に関する一提案

徳島大学大学院 学生員 ○麻植 泰夫
 徳島大学工学部 正会員 児嶋 弘行
 岐阜大学工学部 正会員 中川 建治

1. まえがき

クラックを含む平板の解析に関する従来の理論解ではクラック先端部で無限大の応力が生じることになる。また、有限要素法による解析ではクラック先端部の応力集中の状態を正確に把握するためには多大な計算が必要となる。そこで、本研究ではクラック先端部の応力集中が有限となるような応力関数を考え、検討を行なった。

2. クラック解析用の応力関数の誘導

構造物に実際に生じるクラックは単純なものではないが、以下に述べるような要素クラック(本文の仮称名)を考え、その長さや倍率を α の α の変化させたものをいくつか重ね合わせ、解析の対象とする平板のクラックを表現することにする。

平面問題の要素クラックの一つとして、 xy 平面に無限に広がる平板の y 軸上の $|y| \leq a$ の部分に開口形状が $f(y) = (y-a)(y+a)^2$ --- (1) (図-1) に従うき裂が生じていて、かつ、 y 軸上で $z=y=0$ であれば $\bar{z}$ は 0 でなくてもよいとする応力関数を考える。(引張りクラック)

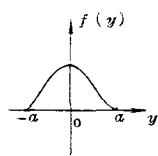


図-1

まず、 xy 平面に x 軸正方向に面内集中外力が作用している場合(図-2)の応力関数 $H_1(z, \bar{z})$ は $H_1(z, \bar{z}) = A\bar{z} \log z + Bz \log \bar{z}$, $A = -(1+\nu)P/8\pi$, $B = (3-\nu)P/8\pi$ --- (2)

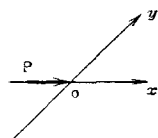


図-2

(以下も複素表示する)であり、原点に相反する大きさの集中力が作用して、原点だけが降伏してピンホールのようにになっている状態(図-3)の応力関数 $H_2(z, \bar{z})$ は、 $H_1(z, \bar{z})$ を z で微分して $H_2(z, \bar{z}) = -\frac{\partial H_1(z, \bar{z})}{\partial z} = -(A\bar{z}/z + B + C \log \bar{z})$, $C = A+B$ --- (3) となる。

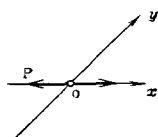


図-3

この $H_2(z, \bar{z})$ に重みとして式(1)の $f(y)$ を乗じて積分して

$$F_{11}(z, \bar{z}) = \int_{-a}^{a} H_2(x, y) \cdot f(y) dy = \bar{z} \varphi_{11}(z) + \psi_{11}(z) \quad \text{--- (4)}$$

$$\varphi_{11}(z) = A \{ 2az^3 + \frac{10}{3}a^2z + i\bar{z}_A^2 z^2 (\log \bar{z}_B - \log \bar{z}_A) \} \quad \bar{z}_A = z - i\lambda, \quad \bar{z}_B = z + i\lambda$$

$$\begin{aligned} \psi_{11}(z) = & 2(A + \frac{1}{5}C)a^2z^4 + 2(\frac{5}{3}A + \frac{2}{3}C)a^2z^2 + \frac{16}{15}(A-B + \frac{23}{15}C)a^5 \\ & + i \{ (A + \frac{1}{5}C)z^3 - 2(A + \frac{1}{5}C)i\bar{z}z^2 - (A - \frac{1}{5}C)a^2z - \frac{8}{15}iCa^3 \} \bar{z}_B^2 \log \bar{z}_B \\ & - i \{ (A + \frac{1}{5}C)z^3 + 2(A + \frac{1}{5}C)i\bar{z}z^2 - (A - \frac{1}{5}C)a^2z + \frac{8}{15}iCa^3 \} \bar{z}_A^2 \log \bar{z}_A \end{aligned}$$

とする。このようにして導かれた $F_{11}(z, \bar{z})$ より、 y 軸上の変位・応力を求めると、形状については予想通りとなるが、せん断応力 τ_{xy} は $x \rightarrow \pm 0$ で

$$|y| \geq a \text{ のとき } \tau_{xy} = 0, \quad |y| \leq a \text{ のとき } \tau_{xy} = 4\pi(zA + C)y(y^2 - a^2) \text{sign}(x) \quad \text{--- (5)}$$

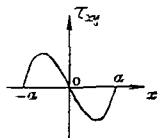


図-4

となり(図-4)、このせん断応力がき裂面の $x = \pm \epsilon$ 両面で $\pm \tau_{xy}$ で作用する。したがって、この τ_{xy} はき裂線に沿って面内線状分布外力が作用しているものに相当する。このせん断応力を打ち消すためにつぎの応力関数 $F_2(z, \bar{z})$ を導く。

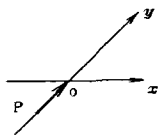


図-5

これは、原点で y 軸正方向に面内集中外力を受ける場合(図-5)の応力関数

$$H_3(z, \bar{z}) = i(-A\bar{z} \log z + Bz \log \bar{z}) \quad \text{--- (6)} \quad \text{に式(5)に比例する3次式を重みとして}$$

乗じて積分すればよいと考えられる。この積分を行なうと

$$F_{12}(z, \bar{z}) = \int_{-a}^{a} H_3(x, y) (y-y)^3 dy = \bar{z} \varphi_{12}(z) + \psi_{12}(z) \quad \text{--- (7)}$$

$$\varphi_{12}(z) = \frac{1}{4}A \left\{ 2az^3 + \frac{10}{3}a^3z + i z_4^2 z_0^2 (\log z_0 - \log z_4) \right\}$$

$$\psi_{12}(z) = \frac{1}{4} \left[2(A - \frac{1}{5}c)az^4 + 2(\frac{5}{3}A - \frac{2}{3}c)a^3z^2 + \frac{25}{23}ca^5 \right. \\ \left. + i \left\{ (A - \frac{1}{5}c)z^3 - 2(A - \frac{1}{5}c)iaz^2 - (A + \frac{1}{5}c)a^2z + \frac{8}{5}ica^3 \right\} z_0^2 \log z_0 \right. \\ \left. - i \left\{ (A - \frac{1}{5}c)z^3 + 2(A - \frac{1}{5}c)iaz^2 - (A + \frac{1}{5}c)a^2z - \frac{8}{5}ica^3 \right\} z_4^2 \log z_4 \right]$$

とす。この $F_{12}(z, \bar{z})$ によるせん断応力 τ_{xy} は、 $x \rightarrow \pm 0$ で

$$|y| \geq A \text{ のとき } \tau_{xy} = 0, \quad |y| \leq A \text{ のとき } \tau_{xy} = \pi(2A - c)y(y^2 - a^2) \operatorname{sign}(x) \quad \text{--- (9)}$$

となり、 $F_{11}(z, \bar{z})$ によるせん断応力を打ち消すことが可能になる。

結局、求める応力関数は、 $F_1(z, \bar{z}) = F_{11}(z, \bar{z}) - 4\pi F_{12}(z, \bar{z})$ --- (9) とす。

他に、平面問題の要素クラックの別の形として、き裂面と直角な面内で開口するもの（せん断クラック）や、曲げ問題としての要素クラックも考えたが、引張りクラックの場合と同様な考え方によるものであるから、ここでは省略する。

3. 解析方法

実際に生じているき裂1本を所定の要素クラックの長さ $2A$ と開口倍率をそれぞれ変化させていくつを重ね合わせることで表現する。この場合、き裂先端に続く大きな変形の部分（以下、仮想塑性域と呼ぶ）は要素クラックの一部をこの部分にも設置することにする。また、載荷する外力と支持辺の条件、および開口部の断面力の解放はさらに重調和解を重ねて逐点法によって満足させる。逐点法でき裂部分の断面力の解放を行おう場合、仮想塑性域の部分は断面力が解放されているわけではないから、この部分では逐点しないことにする。

4. 計算例および考察

計算結果の一例を図-7に示す。これは、開口部の長さ B を1、仮想塑性域の長さ A を0.2とした場合の計算結果である。その他の計算結果も含めて、断面力に関して、 A の値が小さくなるほどクラック先端部での応力集中が大きくなり、開口部での閉合誤差も大きくなった。しかし、この閉合誤差を重ね合わせる要素クラックの数を多くすることにより小さくすることができた。逆に、 A の値が大きくな

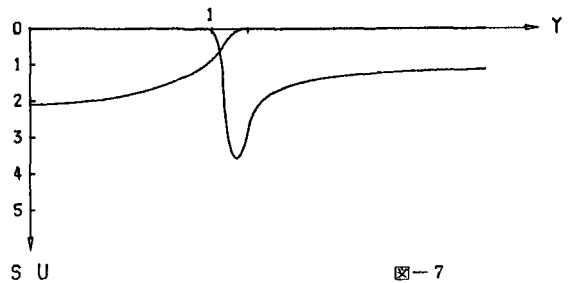


図-7

た場合には開口部先端で負の側に応力が生じて不都合な応力状態になったものがあった。これは、要素クラックの数を減らすことによって解消することができた。以上のことより、 A の値と要素クラックの数との間には密接な関係があり、それぞれある値になった時に最もよい結果が得られるのではないかと考えられる。また、応力が先端部よりやや仮想塑性域にいった所で最大値となったのは A の値に無関係で済むべき場合に共通することである。変位に関しては、どの結果についても満足していると考えられるものが得られ、クラック先端部を滑らかにすりつけることができた。

5. おわりに

クラック先端部の塑性域の部分を弾性論で近似することは合理的ではないが、本研究では先端部の応力集中が有限かつ滑らかな分布として与えることができたので実際のクラックを近似するための一手法として発展させ得る可能性をもつものと考えられる。しかし、要素クラックの重ね合わせの数や重ね合わせ方、塑性域の部分の取り扱い等に問題が残っているため、今後、さらに検討する必要があると思われる。