Dual Approach による最適材料選択に関する基礎的考察

愛媛大学工学部　正員　大久保 禎二

1. まえがき

構造物の最適化を行う場合、その結果に大きな影響を与える設計変数として (a) 構造要素の断面寸法 (b) 構造形状 (c) 使用材種の3種類の設計変数がある。これらの設計変数はそれぞれ異なった性質をもっており、その取扱いには種々の工夫が必要である。

著者は、これまでに制約条件の線形近似および双対理論を用いてトラス構造物の最適部材断面寸法を決定する方法について研究を行い、その有効性を明らかにしてきたが、たとえば[1] 本研究では、この Dual Approach の定式化および解法が、部材断面寸法のみならず使用材料の最適選択にも有効に利用し得ることに着目し、その基礎的考察を行うものである。

2. 原設計問題の設定

本研究では、構造物の各構成要素(部材)の断面寸法に関する設計変数 $\mathbb{X}$、および使用材料の種類 $\mathbb{M}$ を設計変数として考慮する。

$$\mathbb{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T \quad (n: \text{部材総数}) \qquad (1)$$
$$\mathbb{M} = [M_1, M_2, \cdots, M_n]^T$$

一般に設計上考慮すべき制約条件 $\mathbb{g}$ および目的関数 $\mathbb{W}$ は $\mathbb{X}$ および $\mathbb{M}$ の関数であるので、最適設計問題は、構造物の設計上要求される制約条件

$$g_j(\mathbb{X}, \mathbb{M}) \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, m) \qquad (2)$$

のもとで、目的関数 $\mathbb{W}(\mathbb{X}, \mathbb{M})$ を最小あるいは最大にする $\mathbb{X}$ および $\mathbb{M}$ を決定することになる。

$$\mathbb{W}(\mathbb{X}, \mathbb{M}) \longrightarrow \text{Min (or Max)} \qquad (3)$$

いま、断面寸法に関する原設計変数 $\mathbb{X}$ の逆数 $\mathbb{Z}$

$$Z_i = 1/X_i \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (4)$$

を新たな設計変数とし、$g_j(\mathbb{X}, \mathbb{M})$ を $\mathbb{Z}^0$ および $\mathbb{M}^0$ の近傍で Taylor 展開すると次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} & g_j(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}) \approx \bar{U}_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) - \sum_{i=1}^{n}\{C_{ij}Z_i + D_{ij}\Delta M_i\} \geq 0 \\ & \text{ここに、}\quad C_{ij} = -\partial g_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0)/\partial Z_i \\ & \qquad\qquad D_{ij} = -\partial g_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0)/\partial M_i \\ & \qquad \bar{U}_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) = g_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) - \sum_{i=1}^{n} Z_i^0 \partial g_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0)/\partial Z_i \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

上式の D_{ij} は部材 i の材種が使用材種 M_i に隣る1つ上の材種に変化した場合の制約条件 j の変化量である。
また最小化すべき目的関数 $\mathbb{W}(\mathbb{X}, \mathbb{M})$ として構造物の製作費を考え、$\mathbb{W}(\mathbb{X}, \mathbb{M})$ は各構造要素の目的関数の寄与の和として次式で表わされるものとする。

$$\mathbb{W}(\mathbb{X}, \mathbb{M}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(M_i)\, l_i X_i = \sum_{i=1}^{n} W_i(M_i) X_i \rightarrow \text{Min} \qquad (6)$$

ここに、$\rho_i(M_i)$ は構造要素 i の単位容積当りの目的関数の値、l_i は要素長、$W_i(M_i) = \rho_i(M_i)\, l_i$

式(6)を $\mathbb{Z}$ 及び $\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}$ で表わすと次式のようになる。

$$\mathbb{W}(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{Z_i} \longrightarrow \text{Min} \qquad (7)$$

3. 双対設計問題の導入

式(5)の近似線形制約条件のもとで式(7)の目的関数を最小化する近似の原設計問題の設計変数は $\mathbb{Z}$ および $\Delta\mathbb{M}$ であり、この設計問題のラグランジュ関数を導入すると次式を得、この関数を λ について最大化、$\mathbb{Z}$ および $\Delta\mathbb{M}$ について最小化することによって近似の原設計問題の解を得ることができる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \Big[& \frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{Z_i} \\ & + Z_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_{ij} + \Delta M_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{ij} \Big] - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \bar{U}_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

式(8)を $\mathbb{Z}$ および $\Delta\mathbb{M}$ について最小化する場合、最後の項は $\mathbb{Z}$ および $\Delta\mathbb{M}$ に対して定数であり、また第一項は Z_i および ΔM_i に関する項の和であるので、式(8)の最小化は、各[ ]の項をそれぞれ Z_i および ΔM_i について独立に最小化することにより得られる。すなわち、

$$\left.\begin{aligned} \ell(\lambda) &= \min_{\mathbb{Z}, \Delta\mathbb{M}} \mathbb{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}, \lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \min_{\substack{Z_i^l \leq Z_i \leq Z_i^u \\ M_i^l \leq M_i^0+\Delta M_i \leq M_i^u}} \Big[\frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{Z_i} + Z_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_{ij} \\ &\qquad + \Delta M_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{ij} \Big] \Big\} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \bar{U}_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

上式の[ ]の値を最小とする Z_i^* は、$\partial[\ ]/\partial Z_i = 0$ より次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&Z_i^* = \left[\frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}}\right]^{1/2}, \\
&\qquad \text{if } [Z_i^{(L)}(M_i^0+\Delta M_i)]^2 < \frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}} < [Z_i^{(U)}(M_i^0+\Delta M_i)]^2 \\
&Z_i^* = Z_i^{(L)}(M_i^0+\Delta M_i), \\
&\qquad \text{if } \frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}} \leq [Z_i^{(L)}(M_i^0+\Delta M_i)] \\
&Z_i^* = Z_i^{(U)}(M_i^0+\Delta M_i), \\
&\qquad \text{if } \frac{W_i(M_i^0+\Delta M_i)}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}} \geq [Z_i^{(U)}(M_i^0+\Delta M_i)]^2
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

上式においてZ_iはΔM_iの関数となっている。したがって、式(9)の[ ]の最小化は、部材iの材種を選択し得る範囲で種々変化させ、各ΔM_iに対して式(10)よりZ_iを求め、[ ]の値を最小とするΔM_iおよびZ_iを決定すればよいこととなる。

4. 双対関数 $\ell(\lambda)$ の最大化

つぎに、式(9)の$\ell(\lambda)$を最大にする双対変数λを決定する方法として、本研究ではニュートン法を用いることにする。ニュートン法を用いれば*active*な制約条件群：AG

$AG = \{ i \mid \lambda_i > 0 ; i \in m \}$

のみに着目し、その制約条件に対するλの改良を次式により行う。

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)} \quad (11)$$

$S^{(k)}$はλの改良方向であり、次式より求める。

$$S^{(k)} = -[H(\lambda^{(k)})]^{-1} \nabla \ell(\lambda^{(k)}) \quad (12)$$

ここに、$\nabla \ell(\lambda^{(k)})$は*active*な制約条件群に対する$\ell(\lambda)$の$\lambda_j$ ($j \in AG$)に関する一次偏微係数ベクトルであり、その各要素は、次式で単純に計算することができる[1]。

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i + \sum_{i=1}^{n} D_{ij} \Delta M_i - \bar{U}_j(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) \quad (13)$$

また$H(\lambda)$はλ_j ($j \in AG$)に関する$\ell(\lambda)$のヘッセ行列であり、$H(\lambda)$のjk要素は次式より計算される[1]。

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \tilde{n}} \frac{C_{ij} C_{ik}}{W_i(M_i^0+\Delta M_i)} Z_i^3 \quad (14)$$

ここに、$\tilde{n} = \{ i \mid Z_i^{(L)} < Z_i < Z_i^{(U)} \}$

また、式(11)の$\alpha^{(k)}$は改良方向$S^{(k)}$に沿ってのλの改良巾を表わし、λ_j ($j \in AG$)の非負の条件のもとで式(9)の$\ell(\lambda)$を最大にするように決定する。

5. 最適設計アルゴリズム

2.～4.で展開した理論により、近似の最適設計問題のλ, $\mathbb{Z}$および$\mathbb{M}$の最適値λ^*, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}^*$が求められれば、これを初期値として再び近似の最適設計問題(式(5)および(7))を作成し、λ, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{M}$の改良をくり返すことにより最終的な最適解(λ_{opt}, $\mathbb{Z}_{opt}$, $\mathbb{M}_{opt}$)を決定することができる。

6. トラス構造物への応用

上記の理論をトラス構造物に適用した例を示す。トラス構造物の部材の断面寸法に関する設計変数として各部材の断面積、$\mathbb{A} = [A_1, \cdots, A_n]^T$、各部材の使用鋼種として$\mathbb{M} = [M_1, \cdots, M_n]^T$を考える。

制約条件として部材の応力に関する制約条件

$$g_{\sigma j}(\mathbb{A}, \mathbb{M}) = \sigma_{aj}(M_j) - |\sigma_j| \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \quad (15)$$

および格点のたわみに関する制約条件

$$g_{\delta k}(\mathbb{A}, \mathbb{M}) = \delta_{ak} - |\delta_k(\mathbb{A}, \mathbb{M})| \geq 0 \quad (k = 1, \cdots, J) \quad (16)$$

を考慮する。また、目的関数として次式で表わされるトラスの製作費を考え、これを最小とする$\mathbb{A}$および$\mathbb{M}$を決定することとする。

$$W(\mathbb{A}, \mathbb{M}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(M_i) A_i \ell_i = \sum_{i=1}^{n} W_i(M_i) A_i \quad (17)$$

ここに、$\rho_i(M_i)$は部材iの単位容積当りの製作費であり、使用鋼種M_iの関数である。

式(15)を$\mathbb{Z}$および$\mathbb{M}$について線形近似すると次式を得る。

$$
\left.
\begin{aligned}
&g_{\sigma j}(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}) = \bar{U}_{\sigma j}(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) - \sum_{i=1}^{n} [C_{ij} Z_i + D_{ij} \Delta M_i] \\
&\text{ここに、} C_{ij} = N_j - \partial N_j / \partial A_i \cdot A_j^0 \qquad (i = j) \\
&\qquad C_{ij} = -\partial N_j / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2 / A_j^0 \qquad (i \neq j) \\
&\qquad D_{ij} = -\partial \sigma_{aj} / \partial M_i = -(\sigma_{a, M_{i+1}} - \sigma_{a, M_i}) \qquad (i = j) \\
&\qquad D_{ij} = 0 \qquad (i \neq j) \\
&\qquad \bar{U}_{\sigma j}(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) = g_{\sigma j}(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) + \sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i^0 \\
&\qquad \sigma_{a, M_{i+1}} \text{ は } M_i \text{ の 1ランク上の鋼材 } M_{i+1} \text{ の} \\
&\qquad \text{許容応力度、} N_j \text{ は部材 } j \text{ の実軸力}
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

また式(16)は次のように線形近似される。

$$
\left.
\begin{aligned}
&g_{\delta k}(\mathbb{Z}, \mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}) = \bar{U}_{\delta k}(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) - \sum_{i=1}^{n} [C_{ik} Z_i + D_{ik} \Delta M_i] \\
&\text{ここに、} C_{ik} = -\partial |\delta_k| / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2, \quad D_{ik} = 0 \\
&\qquad \bar{U}_{\delta k} = g_{\delta k}(\mathbb{Z}^0, \mathbb{M}^0) + \sum_{i=1}^{n} C_{ik} Z_i^0
\end{aligned}
\right\} \quad (19)
$$

式(17), (18)および(19)の諸値を3.および4.の諸式に代入することにより、トラス構造物の最適なλ^*, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{M}^0+\Delta\mathbb{M}^*$を決定することができる。具体的な計算例については、講演当日発表する。

〈参考文献〉

[1] 大久保, 谷脇：双対理論による構造最適化に関する研究, 愛大工学部紀要, *Vol. 10*, *No. 2*, 昭 58.2