

FETMによる薄板の振動解析について

愛媛大学工学部 正 員 大賀 水田生
 愛媛大学工学部 学生員 田井 理 仁
 愛媛大学工学部 学生員 中嶋 浩 一

1. まえがき

著者らは通常の有限要素法に用いられる剛性マトリックスより誘導される伝達マトリックスを用いる方法(FETM)を静的問題に適用し、解の精度を落とすことなく、有限要素法に必要なマトリックスサイズよりかなり小さなマトリックスの演算により解を求めることができることを報告している¹⁾。そこで、本研究ではFETM法をNewmarkの β 法と結合させることにより、本法の動的問題への拡張を行った。そして、開発したプログラムを用い、簡単な数値計算を行い、得られた結果を有限要素法による結果と比較することにより、本法の動的問題への適用の妥当性・有効性を検討した。

2. 解析方法

(a) Newmarkの β 法

時刻 t における変位、速度、加速度を既知とすると、微小時間間隔 Δt 後の時刻 $(t+\Delta t)$ における変位、速度の近似式はNewmarkの β 法によると、次のようになる。

$$\ddot{x}(t+\Delta t) = \ddot{x}(t) + \Delta t \dot{\ddot{x}}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{\ddot{x}}(t) + \beta(\Delta t)^2 \ddot{\ddot{x}}(t+\Delta t) \quad \text{----- (1)}$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t+\Delta t)] \quad \text{----- (2)}$$

また、時刻 $(t+\Delta t)$ における運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{x}(t+\Delta t) + C\dot{x}(t+\Delta t) + Kx(t+\Delta t) = Q(t+\Delta t) \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 M 、 C 、 K はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックスを、 Q はカベクトルを表す。

式(1)~(3)により、時刻 $(t+\Delta t)$ における加速度は次式により与えられる。

$$A(t+\Delta t)\ddot{x}(t+\Delta t) + G(t) = Q(t+\Delta t) \quad \text{----- (4)}$$

ここで、 $A(t+\Delta t) = M(t+\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2}C(t+\Delta t) + \beta(\Delta t)^2 K(t+\Delta t)$ 、

$$G(t) = C(t+\Delta t) \left[\dot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \right] + K(t+\Delta t) \left[x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{x}(t) \right]$$

(b) FETM法の導入

図-1(a)に示すように板を m 個のstripに分割し、さらにそれぞれのstripを $(n-1)$ 個の有限要素に分割する(図-1(b))。次に、各要素について $A(t+\Delta t)$ 、 $G(t)$ を作成し、これらをそれぞれのstripに組み込み、左側および右側節線上の成分を区別して表示すると次式が得られる。

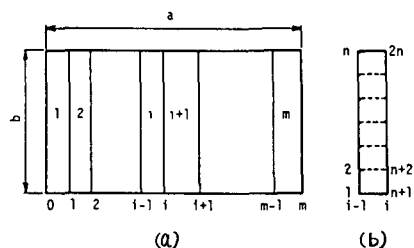


図-1 要素分割

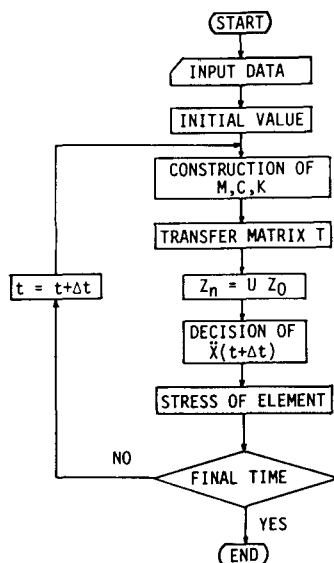


図-2 フローチャート

$$\begin{Bmatrix} Q^L(t+\Delta t) \\ Q^R(t+\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{LL}(t+\Delta t) & A_{LR}(t+\Delta t) \\ A_{RL}(t+\Delta t) & A_{RR}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}^L(t+\Delta t) \\ \ddot{x}^R(t+\Delta t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G^L(t) \\ G^R(t) \end{Bmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

式(5)を変換することにより、slipの左側節線上の節点変位、節点力と右側節線上のそれらおよび外力 F とを結びつける伝達マトリックスが次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}^R \\ -Q^R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_{LR}^{-1}A_{LL} & A_{LR}^{-1} & -A_{LR}^{-1}G^L \\ A_{RR}A_{LR}^{-1}A_{LL}-A_{RL} & -A_{RR}A_{LR}^{-1} & A_{RR}A_{LR}^{-1}G^L-G^R+F \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}^L \\ Q^L \\ 1 \end{Bmatrix}$$

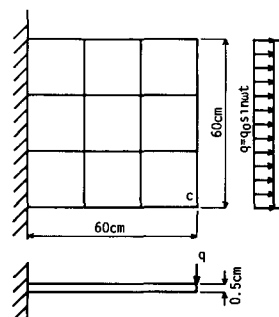


図-3 解析モデル

$$Z_R = T Z_L \quad \text{--- (6)}$$

式(6)で求められた格間伝達マトリックスを用いて、左端の状態量を右端に伝達する。

$$Z_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1 Z_0 = U Z_0 \quad \text{--- (7)}$$

ここで、左右の境界条件を考慮することにより、時刻 $t+\Delta t$ での未知加速度 $\ddot{x}(t+\Delta t)$ が決定される。そして、求まった加速度 $\ddot{x}(t+\Delta t)$ を式(1)、(2)に代入することにより時刻 $t+\Delta t$ での変位および速度が求まる。開発したFETM法のフローチャートを図-2に示す。

3. 数値計算および考察

図-3に示す一辺固定他辺自由の正方形板(辺長 $a=60\text{cm}$ 、板厚 $t=0.5\text{cm}$)を用い、FETM法および有限要素法により数値計算を行った。なお、解析モデルの材料特性はヤング係数 $E=2,100,000\text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、単位体積重量 $\omega=0.0078\text{kg/cm}^3$ である。自由端に周期線荷重($f=g_0 \sin \omega t$, $g_0=3.5\text{kg/cm}$, $\omega=150\text{rad/sec}$)を与え、シミュレーションを行った。両解析法とも時間増分 Δt は 0.002sec 、要素分割数は 3×3 分割である。図-4に点Cでの変位-時間曲線を示している。荷重周期が板の固有周期の近傍であるため、応答曲線は発散傾向を示している。図-5に有限要素法による応答曲線を示しているが、両解析法による結果は全く一致している。図-6に両解析法により得られた加速度-時間曲線を示している。それらの結果は良く一致しており図中では区別できない。

参考文献

- 1) M.Ohga, et al.; Structural Analysis by a Combined Finite-Element Transfer Matrix Method, Com & Struc., 1983
- 2) 山川他; 逐次伝達マトリックス法による大規模構造物の動的応答解析, 日本機械学会論文集48巻429号, 1983

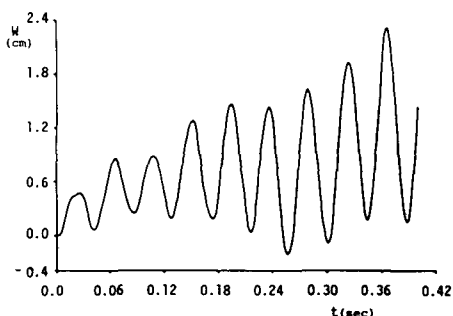


図-4 変位-時間曲線(FETM法)

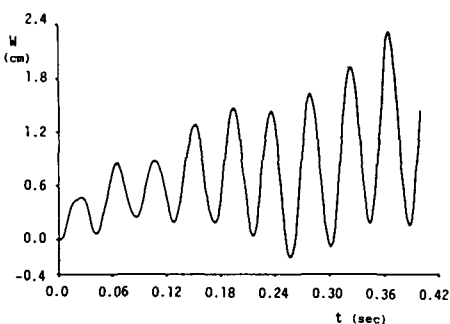


図-5 変位-時間曲線(有限要素法)

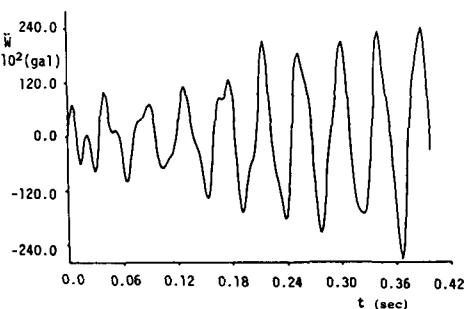


図-6 加速度-時間曲線