荷重が作用する時のトンネル周辺の応力について

東洋建設(株)　正　○森木　悟
〃　　　　　供長　稔
〃　　　　　安養寺志宣

1　はじめに

水平地表面に荷重が作用しない地盤中のトンネル周辺の応力解析は、安藏(1937)やMindlin(1939)によって成されている。本報告は、応力の重ね合わせを利用して、Fourier級数で近似される荷重が、地表面あるいはトンネル周囲に作用した時のトンネル周辺の応力状態を解析するものである。

2　双極座標(α,β)の応力関数

図-1に示すように、地盤内初期応力を水平変位拘束の応力状態と仮定し、半径r_0, 軸深さ$y=h_0$のトンネルを掘削した時の地盤内応力状態は、次の応力関数より求められる。

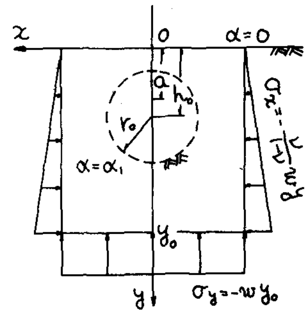

図-1　初期応力状態

(1)
$$
\begin{aligned}
\frac{\chi}{J} = k_0 \Big[\!\Big[& \theta\sin\beta + k_1 \sinh\alpha \ln(\cosh\alpha-\cos\beta) + k_2\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta) \\
& + k_3(\cosh 2\alpha-1) + k_4 \sinh 2\alpha\cos\beta + \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{ k_5 \frac{\sinh\alpha}{n} e^{-n\alpha} \\
& + M_n[\cosh(n+1)\alpha-\cosh(n-1)\alpha] + N_n[(n-1)\sinh(n+1)\alpha-(n+1)\sinh(n-1)\alpha]\Big\}\cos n\beta \Big]\!\Big] \\
+ k_0' \Big[\!\Big[& \sinh^2\alpha/(\cosh\alpha-\cos\beta)^2 + k_2'\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta) + k_3'(\cosh 2\alpha-1)\cos\beta + k_4'\sinh 2\alpha\cos\beta \\
& + M_n'[\cosh(n+1)\alpha-\cosh(n-1)\alpha] + N_n'[(n-1)\sinh(n+1)\alpha-(n+1)\sinh(n-1)\alpha]\Big\}\cos n\beta \Big]\!\Big]
\end{aligned}
$$

地表面$(\alpha=0)$に、鉛直荷重$P(\beta)$あるいは、せん断荷重$T(\beta)$が作用した場合の境界条件は、それぞれ式(2),(3)で表わせ、この条件を満足する応力関数は式(4),(5)となる。

$$
(2)\begin{cases} \alpha=0: & \sigma_\alpha + P(\beta) = 0 \qquad \tau_{\alpha\beta}=0 \\ \alpha=\alpha_1: & \sigma_\alpha = 0 \qquad \tau_{\alpha\beta}=0 \end{cases}
\qquad
(3)\begin{cases} \alpha=0; & \sigma_\alpha = 0 \qquad -\tau_{\alpha\beta}+T(\beta)=0 \\ \alpha=\alpha_1; & \sigma_\alpha = 0 \qquad \tau_{\alpha\beta}=0 \end{cases}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{\chi}{J} = {} & F_1\cosh 2\alpha\cos\beta + F_2(\cosh 2\alpha-1)\cos\beta + F_3\Big[\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta) + \frac{1}{2}\sinh 2\alpha\cos\beta\Big] \\
& + \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{ \frac{2e^{-n\alpha}}{(n-1)n(n+1)}(n\sinh\alpha+\cosh\alpha) + H_n[\cosh(n+1)\alpha-\cosh(n-1)\alpha] \\
& \quad + I_n[(n-1)\sinh(n+1)\alpha-(n+1)\sinh(n-1)\alpha]\Big\}(C_n\cos n\beta + S_n\sin n\beta)
\end{aligned}
$$

(5)
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{\chi}{J} = {} & L_1\sinh 2\alpha\sin\beta + L_2\cosh 2\alpha\sin\beta + \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{ 2e^{-n\alpha}\sinh\alpha + H_n'[\cosh(n+1)\alpha-\cosh(n-1)\alpha] \\
& + I_n'[(n-1)\sinh(n+1)\alpha-(n+1)\sinh(n-1)\alpha]\Big\}(C_n'\cos n\beta + S_n'\sin n\beta)
\end{aligned}
$$

また、トンネル周囲$(\alpha=\alpha_1)$で、半径方向に荷重$P''(\beta)$が作用する場合の境界条件は式(6)となり、応力関数(7)はこの条件を満たす。

$$
(6)\begin{cases} \alpha=0: & \sigma_\alpha = 0 \qquad \tau_{\alpha\beta}=0 \\ \alpha=\alpha_1: & \sigma_\alpha + P''(\beta) = 0 \qquad \tau_{\alpha\beta}=0 \end{cases}
$$

$$(7)\quad \frac{1}{a}\frac{\chi}{J}= F_2''(\cosh 2\alpha-1)\cos\beta+F_3''[\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta)+\frac{1}{2}\sinh 2\alpha\cos\beta]$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{H_n''[\cosh(n+1)\alpha-\cosh(n-1)\alpha]+I_n''[(n-1)\sinh(n+1)\alpha-(n+1)\sinh(n-1)\alpha]\}(C_n''\cos n\beta+S_n''\sin n\beta)$$

ここに、Fourier級数で近似される荷重 $P(\beta)$, $T(\beta)$, $P''(\beta)$ をそれぞれ $\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\beta+b_n\sin n\beta)$ と表わす時、任意定数 $F_1, F_2, \cdots, S_n''$ は (8), (9), (10) となる（算定式省略）。

$$(8)\begin{cases} F_1=-\left(\frac{a_0}{2}\right) \qquad F_2=\left(\frac{a_0}{2}\right)\frac{1}{2}(1+\coth^2\alpha_1) \qquad F_3=-\left(\frac{a_0}{2}\right)\coth\alpha_1\,\mathrm{csch}^2\alpha_1 \\ H_n=-\sinh^2\alpha_1/B_n \qquad I_n=\{e^{-n\alpha_1}\sinh n\alpha_1+n\sinh\alpha_1(n\sinh\alpha_1+\cosh\alpha_1)\}/B_n \qquad B_n=\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1 \\ C_n=-\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\ell}k a_k \qquad S_n=-\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\ell}k b_k \end{cases}$$

$$(9)\begin{cases} L_1=\left(\frac{a_0}{2}\right) \qquad L_2=-\left(\frac{a_0}{2}\right)\coth 2\alpha_1 \\ H_n'=-\{e^{-n\alpha_1}\sinh n\alpha_1+n\sinh\alpha_1(n\sinh\alpha_1-\cosh\alpha_1)\}/B_n \qquad I_n'=n\sinh^2\alpha_1/B_n \qquad B_n=\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1 \\ C_n'=-\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\ell}b_k \qquad S_n'=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\ell}a_k+\left(\frac{a_0}{2}\right) \end{cases}$$

$$(10)\begin{cases} F_2''=-\left(\frac{a_0}{2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{csch}^2\alpha_1 \qquad F_3''=\left(\frac{a_0}{2}\right)\coth\alpha_1\,\mathrm{csch}^2\alpha_1 \\ H_n''=(n^2-1)\sinh n\alpha_1\sinh\alpha_1/B_n \qquad I_n''=-(n\sinh\alpha_1\cosh n\alpha_1+\sinh n\alpha_1\cosh\alpha_1)/B_n \qquad B_n=\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1 \\ C_n''=-\dfrac{e^{-(n-1)\alpha_1}\sum_{\ell=1}^{n-1}[e^{2\ell\alpha_1}\sum_{k=1}^{\ell}k e^{-k\alpha_1}a_k]}{(n-1)n(n+1)} \qquad S_n''=-\dfrac{e^{-(n-1)\alpha_1}\sum_{\ell=1}^{n-1}[e^{2\ell\alpha_1}\sum_{k=1}^{\ell}k e^{-k\alpha_1}b_k]}{(n-1)n(n+1)} \end{cases}$$

3 計算結果

計算結果の報告は、発表日に行ないます。