

境界要素法によるトンネル周辺地山の線形粘弾性解析

徳島大学大学院 学生員 ○安田 亨
 徳島大学工学部 正員 藤井 清司
 徳島大学大学院 学生員 西村 茂

1. はじめに 境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) は、古くから積分方程式法、境界積分法などの呼び名で知られている解析法であるが、数々の利点が見直され、コンピューターを駆使した離散定式化の考えが荒繰されるにつれ、ここ数年にわかに脚光を浴びるようになってきている。BEMは、現在幅広い分野への適用が研究されており、本報告は特に粘弾性問題に着目している。時間依存性問題は、基礎式をLaplace変換して時間微分を消去し、形式上は弾性問題として処理する方法が一般的であるが、その際Laplace逆変換を適切に行うことができれば、この変換法は非常に有効なものとなる。そこで本報告は、逆変換の精度を決定づける変換パラメータの決定について検討し、この解析手法を発展させようとしたものである。

2. 解析概要 BEMによって粘弾性問題を扱う場合には、Laplace変換を施し時間微分を消去する方法、時間依存性を示す基本解を用い直接時間積分する方法などがあるが、前者の変換法によれば形式上は線形弾性解析が利用できる。BEMの適用は簡便なものとなる。いま境界Γで囲まれ、領域Ωを占める均質等方弾性体において、物体力を無視すると、境界Γ上の任意点における変位に関する境界積分方程式は次のように与えられる。

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{y})u_{\alpha}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) u_{\alpha}(\mathbf{y}_1) dP(\mathbf{y}_1) = \int_{\Gamma} \bar{u}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) f_{\beta}(\mathbf{y}_1) dP(\mathbf{y}_1) \quad (1)$$

ここに、 u_{α} , f_{β} は変位、応力成分を示し、領域Ω内の任意点の直角座標を $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ で、境界Γ上について $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ で表す。 $\bar{u}_{\alpha\beta}^*$, $P_{\alpha\beta}^*$ は支配方程式を満たす基本解であり、通常 Kelvin解が用いられる。また境界がなめらかな場合、 $C_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = 1/2$ となる。

一方、線形粘弾性体の構成式は次のような記憶積分で与えられる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = E_{ijkl}(\mathbf{x}, t) \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t E_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (2)$$

ここで、 E_{ijkl} は緩和関数テンソルであり、

$$E_{ijkl}(t) = \lambda(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

という形で与えられる。さらに式(2), (3)に変換パラメータ s としてLaplace変換することによって、

$$\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}; s) = s \bar{E}_{ijkl}(s) \bar{\epsilon}_{kl}(\mathbf{x}; s) \quad (4)$$

が得られ、線形粘弾性体は弾性定数が $s \bar{E}_{ijkl}$ 、すなわちせん断弾性定数 $G = s\mu$ 、ボアソン比 $\nu = \lambda / (2(\lambda + \mu))$ であるような線形弾性体として扱える。次に緩和関数を経積分成分 K 、せん断成分 G で表した場合、 $\lambda = K - \frac{2}{3}G$ 、 $\mu = G$ となり、これらの緩和関数によりLaplace空間における2次元平面ひずみ状態の基本解を表現すると、

$$\bar{u}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) = -\frac{K + \frac{1}{3}G}{4\pi G(K + \frac{1}{3}G)} \left\{ \left(\frac{K + \frac{1}{3}G}{K + \frac{1}{3}G} \right) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \bar{\delta}_{\alpha\beta} + \frac{r_{\alpha} r_{\beta}}{r^2} \right\} \quad (5)$$

$$\bar{P}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) = -\frac{K + \frac{1}{3}G}{2\pi(K + \frac{1}{3}G)} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left\{ \left(\frac{G}{K + \frac{1}{3}G} \right) \bar{\delta}_{\alpha\beta} + \frac{2r_{\alpha} r_{\beta}}{r^2} \right\} + \frac{G}{r(K + \frac{1}{3}G)} (r_{\alpha} n_{\beta} - r_{\beta} n_{\alpha}) \right] \quad (6)$$

となる。ここに、 n_{α} は外向き単位法線、 $r = y_1 - y$ である。次に離散化の際境界ΓをM個の一定要素で近似し以上の手順を踏まえ、境界積分方程式を記すと次式となる。

$$\frac{1}{2} \bar{u}_{\alpha}(\mathbf{y}; s) + \sum_{j=1}^M \bar{u}_{\alpha}(\mathbf{y}_j; s) \int_{\Gamma_j} \bar{P}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_j; s) dP(\mathbf{y}_j) = \sum_{j=1}^M \bar{f}_{\beta}(\mathbf{y}_j; s) \int_{\Gamma_j} \bar{u}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_j; s) dP(\mathbf{y}_j) \quad (7)$$

式(7)にLaplace変換パラメータ s ($s = r_{\alpha}$)を与えるとLaplace空間での解 $\bar{u}$, $\bar{P}$ が得られ、任意時間 t を与えてこの解をLaplace逆変換すれば原空間における解が求まる。詳しくは三井、草岡らが報告している¹⁾。先にも述べたようにこの変換法の精度はLaplace変換パラメータに支配されている。従ってこのパラメータの決定をい

かに適確に行うかが最も重要である。本報告では簡便と精度良く決定するため、静的クリーフ試験から緩和定数を決定する方法を応用した。すなわち試験から得られた遅延スペクトルの卓越する点での遅延時間を求め、これを緩和スペクトルが卓越する点である緩和時間に変換して、Laplace変換パラメータとして採用すれば個数が少なくても精度の良い逆変換ができるのである。この考えの基本となるレオロジーモデル定数の決定法については文献2)に詳述されている。

3. 解析例および解析結果 円形トンネルの周辺地山の粘弾性挙動を解析する。周辺地山は均質等方粘弾性地山と想定し、トンネル周壁にはトンネルを掘削することによる開放応力(100 kgf/cm²)を地山の側圧係数が1として全周壁に均一に作用させる。図1は境界要素分割図であり、精度を高める目的で全円周部を境界としている。なお、比較のためFEMでも同じ条件で解く(要素分割を図2に示す)。周辺地山の材料特性は粘弾性力学モデルを5要素Maxwellモデルとして指数型の緩和関数によって与え、遅延スペクトルを利用する方法により、

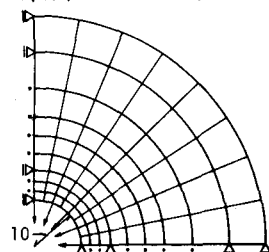
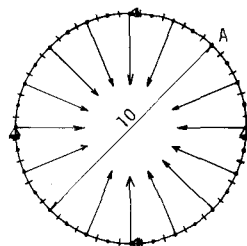
$$K = K_0 + K_1 \exp(-t/T_1) + K_2 \exp(-t/T_2) \quad (8)$$

$$G = G_0 + G_1 \exp(-t/T_1) + G_2 \exp(-t/T_2)$$

$$K_0 = 78524, K_1 = 13021, K_2 = 31119 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$G_0 = 58893, G_1 = 9765, G_2 = 23340 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$T_1 = 0.0749, T_2 = 3.935 \text{ day とする。}$$



決定に用いた静的クリーフ試験の経日ひずみを図3に白

丸で示し、式(8)の緩和定数により計算されたひずみ値を 図1 境界要素分割

実線で示している。両者はほぼ一致しており定数は妥当である。次に緩和定数を式(5)(6)の基本解に適用する際は、式(8)をLaplace変換して、

$$\bar{K} = K_0/s + \sum_{n=1}^2 [K_n/(s + 1/T_n)], \bar{G} = G_0/s + \sum_{n=1}^2 [G_n/(s + 1/T_n)] \quad (9)$$

としてあてはめる。またLaplace変換パラメータの決定には図4の遅延スペクトルを利用して、 $\beta_1 = 0.075, \beta_2 = 0.2, \beta_3 = 1.0, \beta_4 = 3.94$ とする。

計算結果を図5に示す。この図はトンネル周壁45°部(図1のA部)の経日変位を表している。なお図中 $\alpha = 0$ において黒三角で示しているのは確認のため図1のモデルでBEMにより線形弾性解析を行った結果である。図5において両者を比較すると初期に若干問題があるもののほぼ近似している。BEMについて変換パラメータをこれ以上増やしてもさほど精度上変化は無く、一般には10個程度のパラメータを用いて変換するが、本法によれば3~4個で充分であり合理的な方法であるといえよう。またBEMは少ない入力データ量、無限領域の扱いが簡単などの点で有利な解法であり、本解析例においてもBEMはFEMに比べ演算コストが大幅に改善されることが確認された。

4. おわりに Laplace変換パラメータを遅延スペクトルを利用して決定するという本手法は、BEMによる粘弾性解析に充分適用できることがわかった。また実際の地山の材料特性をいかに評価するかは設計面で非常に重要であるが、本法は材料定数、および変換パラメータを試験から決定するものであり、採取されたデータによる材料特性の評価が容易にできるなどの点からも有効な方法であると思われる。

参考文献 1). 草間・三井ら：数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解，土木学会論文報告集，才292号，2). 赤木；レオロジーモデル定数の一決定法，土と基礎，Vol. 25, No. 3

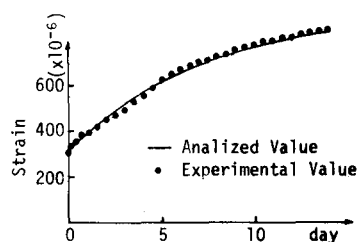


図3 経日ひずみ

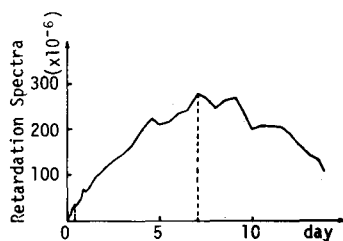


図4 遅延スペクトル

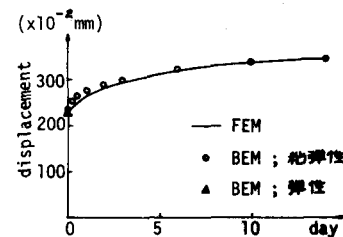


図5 経日変位