境界要素動的線形計画法（The BE&DLP Method）の開発

広島工業大学　正員　二神種弘

1．はじめに

微分方程式系の最適制御に関する研究が，Bellman，Pontryaginや Lions を始めとする多くの研究者によりおこなわれてきた。また，近年は大型計算機の出現とともに，微分方程式の数値解法に関する研究が急速に進み，差分法に加えて，有限要素法（FEM）や境界要素法（BEM）が開発され，理工学のいろいろな分野で頻繁に用いられるようになった。

境界要素法（BEM）は，解析対象領域全体を離散化する差分法や有限要素法と違って，境界での積分方程式の離散化のみをおこなうので，問題の空間次元を1つ減らすことになり，入力データや計算時間を大幅に短縮できる。また，境界要素法は有限要素法と併用して，両手法の欠点をカバーしあうことができる有用な手法である。

ここでは，線形の目的関数を有する非定常な偏微分方程式系の最適化のために，境界要素法（BEM）と動的線形計画法（DLP）を併用して開発した境界要素動的線形計画法（The BE&DLP Method）について述べる。

なお，境界要素法と線形計画法（LP）あるいは動的計画法（DP）を併用した境界要素線形計画法（The BE&LP Method）や境界要素動的計画法（The BE&DP Method）の開発に関する研究がすでに著者によりなされている。[1), 2)]

2．境界要素動的線形計画法

2．1　基礎微分方程式系

境界要素動的線形計画法を次のような等式あるいは不等式の制約条件および線形の目的関数を有する偏微分方程式系の最適化のために開発した。

目的関数

$$Z = \underset{\{\{\theta\}\}}{\mathrm{Opt.}}\ F(\{\{\phi\}\},\{\{\theta\}\}) = \underset{\{\{\theta(t)\}\}}{\mathrm{Opt.}} \int_0^{T^e} f(\{\alpha(t)\phi(t)\},\{\beta(t)\theta(t)\})\,dt \quad (\text{throughout } \Omega\times T^e) \qquad (1)$$

subject to:

状態方程式

支配微分方程式

$$\mathrm{D.E.}\left(x,t,\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n\phi}{\partial x^n},\frac{\partial\phi}{\partial t},\theta\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad (2)$$

初期条件

$$\mathrm{I.C.}(x,t{=}0,\phi) = 0 \qquad \text{at } t = 0, \text{ in } \Omega \qquad (3)$$

終端条件

$$\mathrm{F.C.}(x,t{=}T^e,\phi) = 0 \qquad \text{at } t = T^e, \text{ in } \Omega \qquad (4)$$

境界条件

$$\mathrm{B.C.}(X,t,\phi,q) = 0 \qquad \text{on } \Gamma \qquad (5)$$

制約条件

$$r(x,\phi,\theta) \lesseqgtr 0 \qquad \text{in } \Omega^r \qquad (6)$$

ここで，ϕ＝状態変数（温度，濃度，ポテンシャル，etc.）；θ＝制御変数（制御可能な負荷，etc.）；

$\alpha(t)$ = 状態評価係数；$\beta(t)$ = 制御評価係数；x = 座標(x, y or z)；X = 境界の座標(X, Y or Z)；t = 時間；Ω = 全空間領域；T^{Θ} = 全時間領域；Ωr = 制約領域；q = フラックス。

2次元非定常状態の熱伝導の最適制御問題では，(2)式で与えられる支配微分方程式は，次のようである。

$$\rho c\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \theta + Q \qquad (2)'$$

ここで，ϕ = 状態変数(温度)；θ = 制御変数(制御可能な熱負荷)；Q = 定数(制御不可能な熱負荷)；D = 熱伝導係数；ρ = 密度；c = 比熱。

初期条件および終端条件の例としては，次式が考えられる。

$\phi(x,y,t=0) = \phi^0(x,y)$, $\phi(x,y,t=0)$ is free (3)'　$\phi(x,y,t=T^{\Theta}) = \phi^T(x,y)$, $\phi(x,y,t=T^{\Theta})$ is free (4)'

境界条件の例としては，次のようなものが考えられる。

$$\phi(x=X,y=Y) = \hat{\Phi}(X,Y),\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|(x=X,y=Y) = \hat{q} \qquad (5)'$$

制約条件の例としては，次のような簡単な不等式がしばしばでてくるであろう。

$$\underline{\Phi} \leq \phi \leq \overline{\Phi}\ \text{すなわち}\ \begin{cases}\phi \geq \underline{\Phi}\\ \phi \leq \overline{\Phi}\end{cases},\quad \underline{\Theta} \leq \theta \leq \overline{\Theta}\ \text{すなわち}\ \begin{cases}\theta \geq \underline{\Theta}\\ \theta \leq \overline{\Theta}\end{cases} \qquad (6)'$$

ここで，$\underline{\Phi}$ = 状態変数下限；$\overline{\Phi}$ = 状態変数上限；$\underline{\Theta}$ = 制御変数下限；$\overline{\Theta}$ = 制御変数上限。

2．2 境界要素動的線形計画法の定式化

上に述べた基礎微分方程式系の離散化に境界要素法を用いると，目的関数が状態変数ϕと制御変数θの1次関数である場合には，次のように境界要素動的線形計画法(The BE&DLP Method)の定式化が得られる。

目的関数

$$Z = \underset{\{\{\theta_i^\tau\}\}}{\mathrm{Opt.}} \sum_{\tau=1}^{T} f^\tau(\{\phi_j^\tau\},\{\theta_i^\tau\}) = \underset{\{\{\theta_i^\tau\}\}}{\mathrm{Opt.}} \sum_{\tau=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^\tau\phi_j^\tau + \sum_{i=1}^{I}\beta_i^\tau\theta_i^\tau\right) \qquad (7)$$

subject to:

状態変換方程式 ((T×N)-Eqs.)

$$\underset{N\times N}{[H^\tau]}\{\phi_j^\tau\} = \underset{N\times N}{[G^\tau]}\{q_j^\tau\} + \underset{N\times M}{[E^\tau]}\{\phi_m^{\tau-1}\} + \underset{N\times I}{[D^\tau]}\{\theta_i^\tau\} + \{b_n^\tau\} \qquad (8)$$

制約条件式 (L-Eqs.)

$$\underset{L\times(T(N+I))}{[R]}\begin{Bmatrix}\{\{\phi_j^\tau\}\}\\ \{\{\theta_i^\tau\}\}\end{Bmatrix} \lesseqgtr \{\{B_l\}\} \qquad (9)$$

ここで，ϕ_j^τ = τ番目時間ステップのj番目の状態変数；θ_i^τ = τ番目時間ステップのi番目制御変数；q_j^τ = τ番目時間ステップのj番目フラックス；α_j^τ = 状態評価係数；β_i^τ = 制御評価係数；$[H^\tau]$ = 状態マトリックス；$[G^\tau]$ = フラックスマトリックス；$[D^\tau]$ = 制御マトリックス；$[R]$ = 制約マトリックス；b_j^τ, B_l = 定数；ϕ_m^τ = τ番時間ステップのm番目内部点の状態；$\tau = 1 \sim T$ = 時間ステップ番号；$j, n = 1 \sim N$ = 境界点番号；$i = 1 \sim I$ = 制御変数番号；$m = 1 \sim M$ = 内部点番号；$l = 1 \sim L$ = 制約式番号。

3．結語

境界要素動的線形計画法は，初期条件，終端条件および境界条件のみならず，等式あるいは不等式の制約条件をも考慮できるものであるから，理工学のいろいろな分野ででてくるシステムの最適設計や計画などの有力な解析手法となると思われる。　境界要素動的線形計画法の効率的算法がその特徴に着目して開発できるだろう。

参考文献 1) Futagami, T.,"Boundary Element & Linear Programming Method in Optimization of Partial Differential Equation Systems", Proc., 3rd International Seminar on Boundary Element Methods, Springer-Verlag, 1981, pp. 457-471. 2) Futagami, T., "Boundary Element & Dynamic Programming Method in Optimization of Transient Partial Differential Systems", Proc., 4th International Seminar on Boundary Element Methods in Engineering, Springer-Verlag, 1982, pp. 58-71.