

分岐管路系の過渡水理解析

広島大学工学部 正会員 岸松 芳昭
 広島大学大学院 学生員 〇田中 俊一

1. まえがき

水輸送の手段として、管水路系は開水路系と比較して効率的であること、水質が保持できること、また、地形の制約を受けないことなどの利点を有しているため様々な用水に用いられており、需要形態に見合った供給ができるという特徴をもっている。実際、需要水量が変化した場合の管水路系の過渡状態における流況を把握することが必要となる。そこで、本報告では、緩やかに変動する非圧縮性流体の流れを対象として、平衡解近傍の微小変動量を用いることによって、もとの非線形状態方程式を線形化するとともに、これに基づく水理解析法を展開した結果について述べる。

2. 系の状態方程式とその線形近似式

一個の貯水水槽と m 個の末端調圧水槽とから成る樹枝状の管水路系に対して、エネルギー方程式と連続方程式とを適用すれば、末端管路流量 $Q_{T2}(m)$ と末端水槽水位 $H_3(m)$ に関する状態方程式が得られる。¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_{T2}(m) &= -L'^{-1}(m, m) H_{C1}(m) - L'^{-1}(m, m) K'(m, m) Q_{T2}(m) \\ \dot{H}_3(m) &= S'^{-1}(m, m) Q_{T2}(m) - S'^{-1}(m, m) C(m, m) f(H_3(m)) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

ところで、式(1)において、非線形項は管路抵抗に関する項 $K'(m, m)$ と、場合によっては水槽水位の関数 $f(H_3(m))$ に関する項である。いま、流量 Q と水位 H の平衡解を Q^* , H^* とし、それぞれの微小変動量を ΔQ , ΔH とすれば、 $Q = Q^* + \Delta Q$, $H = H^* + \Delta H$ と表わすことができる。このとき、式(1)中の $K'(m, m)$ 項に含まれる管路抵抗は、 $H_{T2}(n) = K(n, n) |Q_T(n, n)| / Q_T(n) \div \sum K(n, n) |Q_T^*(n, n)| - K(n, n) |Q_T^*(n, n)| / Q_T^*(n, n)$ と近似することができる。これらの関係を用いることによって、式(1)より末端管路流量および末端水槽水位の変動量 $\Delta Q_{T2}(m)$, $\Delta H_3(m)$ に関する線形近似化された方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{Q}_{T2}(m) \\ \Delta \dot{H}_3(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L'^{-1}(m, m) K'(m, m) & -L'^{-1}(m, m) \\ S'^{-1}(m, m) & -S'^{-1}(m, m) C(m, m) F(H_3^*(m)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_{T2}(m) \\ \Delta H_3(m) \end{pmatrix} \dots (2)$$

ここに、 $F(H_3^*(m))$: 末端水槽水位に関する項 $f(H_3(m))$ を、 H_3^* で微分し対角行列に置いたものである。

式(2)は、 ΔQ , ΔH に関して線形な連立常微分方程式であり、その一般解は次のようになる。²⁾

$$\Delta Q_{T2}(m) = C_1 \alpha_{(m)}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_{(m)}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_{2m} \alpha_{(m)}^{(2m)} e^{\lambda_{2m} t} \dots (3)$$

$$\Delta H_3(m) = C_1 \beta_{(m)}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_{(m)}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_{2m} \beta_{(m)}^{(2m)} e^{\lambda_{2m} t} \dots (4)$$

ここに、 λ_s : 特性方程式の根、 $\alpha_{(m)}^{(s)}$, $\beta_{(m)}^{(s)}$: 方程式の特殊解、 C_s : 任意定数 ($s = 1, 2, \dots, 2m$)。

3. 数値計算例

前節で示した系の状態方程式(1)とそれを線形近似化した方程式(2)のそれぞれに従って数値計算した結果の一例を示すことにする。まず、対象とした系は、図-1に示される三分岐の管路系であり、末端水槽からの取り出し流量はオリフィス型のもので制御されるものとした。系の諸元は表-1のようである。そして、流出孔の開度操作の様式には開度が時間とともに直線的に変化するパターンを考えた。以下では、状態方程式(1)に基づく解法を計算法(1)、式(2)に基づく解法を計算法(2)と呼ぶことにする。計算法(1)には、Runge-Kutta-Gill法を採用した。また、計算法(2)の具体的な計算手順は、時間区間 ΔT に対して次のようである。1)時間区間 ΔT の終わりの時刻での流出孔開度に対応する平衡解を仮定する。2)その平衡解を用いて式(2)右辺の係数行列を計算し式(3), (4)中の λ , α , β を計算する。3)時間区間 ΔT の初期時刻での状態点と先の1)で求めた平衡点との

差を ΔT 区間の初期微小変動量とし、 h_3 を決める。5) ΔT の初期状態量に 4) で求めた ΔT の終期時刻の変動量を加えたものを新しく次のステップの初期状態量とする。以上の手順を繰り返すことによって、過渡状態の流量および水位を計算した。なお、開度操作終了後については、操作時間内の最後の時間ステップに対する式 (3), (4) を用いて計算した。

今、末端水槽③に付設の流量制御装置の流出孔開度を 0.03 から 0.05 (m^2) まで操作時間 40 分で非常に緩やかに操作する時 (17% 程度の流出流量の増加に相当)、水槽③に生じる水位変動 z_3 を初期定常水位 z_3^* に対する割合で示したものが図-2 であり、同様に、図-3 は末端管路②の流量変動を示したものである。なお、使用した時間区間は $\Delta T = 4$ (分) である。これらの図から二つの計算法による解析結果には、時間の経過とともにかなりの差異が生ずることがわかる。この原因として、次のようなものが考えられる。まず、前節で示したように計算法 (2) は、微小変動理論に基づくものであるが、 ΔT の選ぶ方が適当でないため、時間区間 ΔT の初期変動量が所定の条件を満足していないことによる誤差の累積である。図-4 は、各時間ステップの平衡解に対する初期変動量の割合を示したものである。これによれば、 z_3 に対するこの比率は第 1 ステップで 8%, 以降のステップで 14% ~ 18% とかなり大きなものとなっているが、 q_2, q_3, z_4 に関しては 10% 以内にあることがわかる。次に、計算法 (2) は、計算法 (1) 上 ΔT の時間区間内において、平衡解に対応した一定の係数行列を用いているが、実際は流量変動に伴い管路抵抗が変化している点である。

ところで、2つの方法の計算時間についてみると、今の三分岐管路系のいくつかの計算例では、計算法 (2) は計算法 (1) の $1/10$ 程度の時間ですむような結果を得ており、この点で計算法 (2) は有利なことがわかる。

4. あとがき

非線形な状態方程式 (1) の線形近似化式に基づく計算法 (2) は、本来、各時間区間で与える初期変動量が微小であれば十分な近似をもたらすものと思われる。したがって、計算法 (2) の近似度を向上させ、その有用性を明らかにするためには、適当な時間区間 ΔT の選ぶ方、および係数行列の評価方法など、今後さらに検討すべき点は少なくない。

参考文献 1) 常松芳昭 管路系における非定常流れの解析法について (1), 土木学会中四年講, 1977 年

2) G. ストラング著 (井上昭訳), 線形代数とその応用, 産業図書, 1978 年

表-1 管路系の諸元

branch No.	1	2	3
pipe length(m)	500	200	300
pipe diameter(m)	0.5	0.3	0.3
node No.	3	4	
cross-sectional area of surge-tank(m^2)	50	30	
elevation of orifice(m)	5	15	

$\phi=25\text{ m}$ $f=0.03$ $C=0.62$ $\beta=1.0$

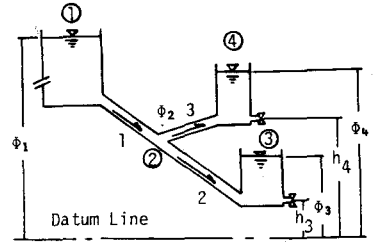


図-1 三分岐管路系

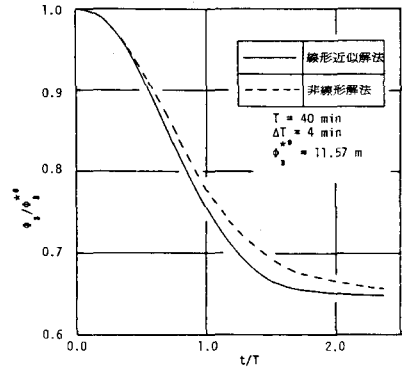


図-2 末端水槽の水位変動

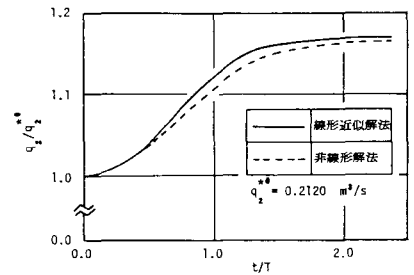


図-3 末端管路の流量変動

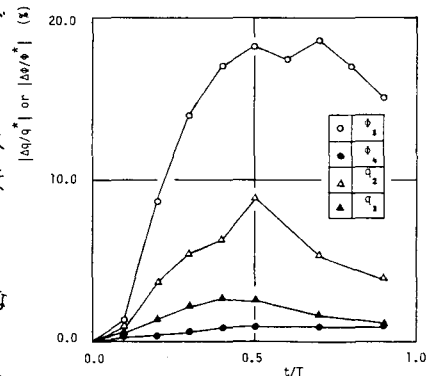


図-4 各時間ステップの初期微小変動量