

三次元弾性論による平板の解析

呉工業高等専門学校

正会員

丸上晴朗

1. まえがき

均質・等方性物体の微小変形を対象とした三次元弾性論に現れるNavierの方程式の物体力の項を無視した場合の長方形板の解析結果を昨年报告した。本報では物体力の項を考慮した場合の解析方法とその結果を述べた。ここでは静的問題を考えているから物体力として具体的に現われるのは平板の自重だけである。

本研究の目的は二つあり、第一は物体力を無視してNavierの方程式の解を求めた場合(物体力は上載荷重として近似的に取扱う)と無視しないで解を求めた場合との差違の程度を明らかにすることである。第二は三次元弾性論による平板の曲げ問題の厳密解を求めておき、各種の平板理論の正確さを検討する場合の基準にすることである。

2. Navierの方程式とその解

図-1の長方形板に三次元弾性論を適用して座標系を図のように決める。四辺を単純支持とし、等分布荷重 q を $z=0$ 面に満載し、支持辺は $z=c$ 面内で $x=0, a; y=0, b$ の四辺とする。境界条件は昨年の報告と同一とし、 $x=0, a$ で $v=w=\sigma_x=0; y=0, b$ で $u=w=\sigma_y=0; z=0$ で $\sigma_z=-q, \tau_{xz}=\tau_{yz}=0; z=c$ で $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ とする。任意点の変位の x, y, z 軸方向成分をそれぞれ u, v, w とし、 λ, μ をラメの定数とする。物体力は下向

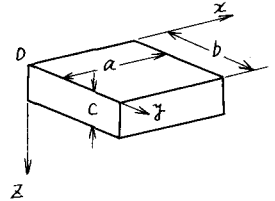


図-1

きに伴い作用するのでNavierの方程式は次のようになる。 $(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\Delta u = 0, (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\Delta v = 0, (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\Delta w + p = 0$ (1)₃ (1)の p は物体力で平板の単位体積当りの重量、 $p \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ とする。(1)の三式へ順にそれぞれ $K_1 \equiv \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}, K_2 \equiv \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}, K_3 \equiv \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{c}$ を乗じて三回連続の積分変換を行い、これから $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ を求める(2)₃式となる。

$\bar{u} \equiv \bar{u}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c u K_1 dx dy dz = \frac{(\lambda+\mu)\mu}{\pi^2 a(\lambda+2\mu)M^2} \left\{ \left\{ \frac{\lambda M}{\lambda+\mu} - 2\left(\frac{c}{r}\right)^2 \right\} B + \frac{r P(m, n, r)}{\pi C \mu} \right\}, \bar{v} \equiv \bar{v}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c v K_2 dx dy dz = \frac{(\lambda+\mu)\mu}{\pi^2 b(\lambda+2\mu)M^2} \left\{ \left\{ \frac{\lambda M}{\lambda+\mu} - 2\left(\frac{c}{r}\right)^2 \right\} B + \frac{r P(m, n, r)}{\pi C \mu} \right\}, \bar{w} \equiv \bar{w}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c w K_3 dx dy dz = \frac{p(m, n, r)}{\pi^2 \mu M^2} \left\{ M - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right\} - \frac{r B}{\pi C(\lambda+2\mu)M^2} \{ (3\lambda+4\mu)M - 2(\lambda+\mu)\left(\frac{c}{r}\right)^2 \}$ (2)₃ 但し、 $M \equiv \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{c}\right)^2, B \equiv \int_0^c \left\{ (-1)^r [w]_{z=c} - [w]_{z=0} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, p(m, n, r) \equiv \frac{abcp}{mnr} \{ 1 - (-1)^m \} \{ 1 - (-1)^n \} \{ 1 - (-1)^r \}$ (3)である。(2)

式から u, v, w を求めるためには逆変換を行う。逆変換式は昨年の報告に示しているのでここでは省略して、求めた u, v, w を次に示す。

$$u = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda C \mu B_{mn}}{a(\lambda+2\mu)M^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu) C \mu}{a(\lambda+2\mu)(r^2 + \frac{m^2}{a^2})^2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (r^2 + \frac{m^2}{a^2}) - 2r^2 \right\} \left\{ B_{mn} \{ 1 + (-1)^r \} + B'_{mn} \{ 1 - (-1)^r \} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{8C^3 P(\lambda+\mu)}{\pi^2 a \mu (\lambda+2\mu)(r^2 + \frac{m^2}{a^2})^2} \{ 1 - (-1)^m \} \{ 1 - (-1)^n \} \{ 1 - (-1)^r \} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}$$

$$v = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda C \mu B_{mn}}{b(\lambda+2\mu)M^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu) C \mu}{b(\lambda+2\mu)(r^2 + \frac{n^2}{b^2})^2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (r^2 + \frac{n^2}{b^2}) - 2r^2 \right\} \left\{ B_{mn} \{ 1 + (-1)^r \} + B'_{mn} \{ 1 - (-1)^r \} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{8C^3 P(\lambda+\mu)}{\pi^2 b \mu (\lambda+2\mu)(r^2 + \frac{n^2}{b^2})^2} \{ 1 - (-1)^m \} \{ 1 - (-1)^n \} \{ 1 - (-1)^r \} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{r^2 + \frac{m^2}{a^2}} \left\{ 1 + \frac{2(\lambda+\mu)r^2}{(\lambda+2\mu)(r^2 + \frac{m^2}{a^2})} \right\} \left\{ B_{mn} \{ 1 + (-1)^r \} + B'_{mn} \{ 1 - (-1)^r \} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{c} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{8C^3 P}{\pi^2 \mu m \pi r (r^2 + \frac{m^2}{a^2})^2} (r^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r^2) \{ 1 - (-1)^m \} \{ 1 - (-1)^n \} \{ 1 - (-1)^r \} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{c} \quad \dots \dots \dots (4)$$

(4)式中の B_{mn}, B'_{mn} は次式で表わされる量で、 B_{mn}, B'_{mn} は未知量である。

$$B_{mn} \equiv \left(\frac{C}{a}\right)^2 + \left(\frac{C}{b}\right)^2, B'_{mn} \equiv \frac{4}{\pi ab} \int_0^a \int_0^b \{ [w]_{z=0} - [w]_{z=c} \} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, B'_{mn} \equiv \frac{4}{\pi ab} \int_0^a \int_0^b [w]_{z=0} + [w]_{z=c} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \dots \dots \dots (5)$$

B_{mn}, B'_{mn} を求めるために、 $z=0, z=c$ における $\sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$ (6) の境界条件から B_{mn}, B'_{mn} に關す

る連立方程式をつくる。(4)式をこのまま(6)へ代入した式で $Z=C$ とすることはFouriér級数の不連続点の値を用いることになり都合が悪い。だから(4)の Z に関するFouriér級数を和に直すと(7)となり、これを(6)へ代入する。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{\alpha(\lambda+2\mu)} \left\{ \frac{k}{\pi} \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\} \left\{ \left(\frac{\pi}{2\lambda m} \right)^2 \operatorname{cosech} \pi \lambda m \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} + \left(\frac{\pi}{2\lambda m} \right)^2 \frac{Z}{C} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4\lambda m^3} \operatorname{cosech} \pi \lambda m \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{4\lambda m^3} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) + \pi (B_{mn} J_1 + B'_{mn} J_2) \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{b(\lambda+2\mu)} \left\{ \frac{k}{m} \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\} \left\{ \left(\frac{\pi}{2\lambda m} \right)^2 \operatorname{cosech} \pi \lambda m \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} + \left(\frac{\pi}{2\lambda m} \right)^2 \frac{Z}{C} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4\lambda m^3} \operatorname{cosech} \pi \lambda m \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{4\lambda m^3} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) + \pi (B_{mn} J_1 + B'_{mn} J_2) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8C^2 p}{\pi^5 \mu m n} \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\} \left\{ \frac{\pi}{2\lambda m} \left\{ 1 - \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\pi^2 (\lambda + \mu)}{4\lambda m (\lambda + 2\mu)} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \left\{ Z \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{cosech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \frac{\pi \lambda m}{2} Z - \operatorname{cosech} \pi \lambda m \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} + \frac{1}{2} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} J_3 + B'_{mn} J_4) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} \quad \dots (7)$$

(7)式で $k = \frac{1}{\pi^2 \mu} 8C^2 (\lambda + \mu) p$, J_1, J_2, J_3, J_4 は昨年の報告中の J_1, J_2, J_3, J_4 と全く同一の式である。(6)式へ(7)式の u, v, w を代入して計算すると G_2 は次のようになる。

$$G_2 = \frac{k \mu \pi^2}{2C(\lambda+2\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m n} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \left\{ 1-(-1)^m \right\} \left\{ 1-(-1)^n \right\} \left\{ \frac{Z}{C} \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\lambda+3\mu}{\pi \lambda m (\lambda+\mu)} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \right.$$

$$\times \cosh \frac{\pi \lambda n}{2} Z \left. \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} + \frac{(\lambda+\mu)\pi^2}{C(\lambda+2\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} k^2 \operatorname{cosech} \frac{\pi \lambda n}{2} \left\{ \frac{k}{C} Z \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{k}{2} \operatorname{cosech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \frac{\pi \lambda m}{2} Z \right.$$

$$\left. - \pi \lambda m \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{(\lambda+\mu)\pi^2}{C(\lambda+2\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B'_{mn} k^2 \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \left\{ \frac{k}{\pi \lambda m} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \frac{k}{2} Z \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) + \frac{k}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \frac{\pi \lambda m}{2} Z \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots (8)$$

上の(8)式で $Z=0$ で $G_2=-q$, $Z=C$ で $G_2=0$ として, B_{mn}, B'_{mn} を求めると次のようになる。

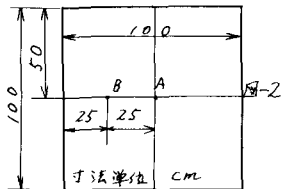
$$B_{mn} = \frac{4\pi C(\lambda+2\mu) \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\} \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m}{\mu(\lambda+\mu) \pi^4 m n \lambda m (\pi \lambda m + \sinh \pi \lambda m)}$$

$$B'_{mn} = \frac{4C \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\}}{\mu(\lambda+\mu) \pi^5 m n \lambda m^2 (\sinh \pi \lambda m - \pi \lambda m)} \left\{ \pi \lambda m \left\{ 2(\lambda+2\mu) \cosh^2 \frac{\pi \lambda n}{2} - C p (\lambda+\mu) \right\} + C p (2\lambda+3\mu) \sinh \pi \lambda m \right\}$$

B'_{mn} を書き換えて $B'_{mn} = B_{mn1} + B_{mn2}$ とおき, $B_{mn2} = \frac{4C^2 p \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\}}{\mu(\lambda+\mu) \pi^5 m n \lambda m^2 (\sinh \pi \lambda m - \pi \lambda m)} \left\{ (2\lambda+3\mu) \sinh \pi \lambda m - \pi \lambda m \right.$
 $\times (\lambda+\mu) \left. \right\} \dots (9)$ とおく。 B_{mn}, B_{mn1} は昨年の報告の B_{mn}, B'_{mn} に一致する。以上のことを考えて(7)の w を書かせる
と次のようになる。 $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} J_3 + B_{mn1} J_4) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4C^2 p \{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\}}{\pi^4 \mu m n \lambda m^2 (\sinh \pi \lambda m - \pi \lambda m)} \left\{ \sinh \pi \lambda m \right.$
 $\left. + \frac{\pi \lambda m}{2} \cosh \frac{\pi \lambda n}{2} Z + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} \cosh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) - \pi \lambda m - \frac{\pi \lambda m}{C} Z \sinh \frac{\pi \lambda n}{2} \sinh \pi \lambda m \left(\frac{Z}{C} - \frac{1}{2} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots (10)$
この式の第一番目の級数は物体力を無視した場合の w と同じ式であるから、物体力によって引きおこされる w は第二番目の級数で示されている。

3. 近似解と厳密解との比較

近似解と厳密解との比較をする場合、比較すべき力学量は力と変形がある。今はたわみ w だけについて比較を行う。以下に計算条件等を示す。板は正方形と長方形とする。正方形板の場合図-2のA, B点でたわみ w を計算した。長方形板は $1m \times 2m$, $1m \times 5m$ の二種とした。板の厚さ C は 1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50 cm の 8通りについて計算した。板は鋼板として, $\lambda = \frac{VE}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 121000 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = G = 81000 \text{ kg/cm}^2$, $p = 0.00785 \text{ kg/cm}^3$ として計算した。なお板厚方向については $C = 1, 2 \text{ cm}$ のときは $Z = 0, \frac{1}{2}C, C$ の三点, 5cm以上のときは $Z = 0, \frac{1}{4}C, \frac{1}{2}C, \frac{3}{4}C, C$ の五点で計算した。スペースの制約から計算結果の一部を表-1に示す。



4. あとがき

近似解と厳密解との比較を示された結果及び示されていない結果について比較すると両解はほとんど一致すると言える。正方形板及び $1m \times 2m$ の長方形板のときは板厚が 40, 50 cm の場合両解の差が少し目立つ。最大で約 7% の差を示した。なお厳密解 $w_{exact} = q \sum \sum w_{mn} + p \sum \sum \bar{w}_{mn}$, 近似解 $w_{approx} = (q+p) \sum \sum w_{mn}$ である。数値計算から $w_{exact} = w_{approx}$ となっているので $p \sum \sum \bar{w}_{mn} = p \sum \sum w_{mn}$ となり $\bar{w}$ や $\bar{p}$ は両解の差違の原因にはならない。

参考文献：1) 丸上晴明 三次元弾性論による板の曲げ理論の検討 第 34 回土木学会中国四国支部学術講演会講演要集 1982年5月

表-1 正方形板のA点の w (cm)

板厚 C (cm)	解法	近似解	厳密解
1	0	2.1162	2.1328
	0.5	2.1164	2.1330
	1	2.1162	2.1328
10	0	2.186×10^3	2.358×10^3
	2.5	2.200	2.373
	5.0	2.205	2.378
	7.5	2.199	2.372
	10	2.184	2.355
50	0	4.031×10^5	5.613×10^5
	25	3.524	4.708
	37.5	3.238	4.510