Dual Approachにおける双対変数の決定法について

愛媛大学工学部　正会員　大久保禎二
愛媛大学大学院○学生員　谷脇　一弘

1. まえがき

著者らはこれまでに双対理論に基づく構造最適化の基礎的研究を行い，その有効性を明らかにしてきているが，本研究では，Dual Approachにおける双対変数を改良する手法として，これまでに提案されているニュートン法，線形連立方程式による方法，指数関数法について，それぞれの方法の特徴，計算能率，収束の状態などについて比較検討を行った結果について述べるものである。

2. Dual Approachによる構造最適化の方法の概要

Dual Approachにより構造最適化を行う場合は，原変数$\mathbb{X}$の逆変数$\mathbb{Z}$ $(=1/\mathbb{X})$を用いた目的関数および線形近似された制約条件g_j $(=\bar{u}_j-u_j)$より構成されるつぎのラグランジュ関数を導入し，まず双対変数λ_j $(j=1,\cdots m)$を変数として$l(\lambda)$を最大化する。ここにmはactiveな制約条件の数

$$\left.\begin{array}{l}
\text{目的関数：}l(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\rho_i l_i}{Z_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left[u_j(\mathbb{Z})-\bar{u}_j\right]\Rightarrow max \\
\text{制約条件：}\lambda_j\geq 0\ \ (j=1,\cdots m) \\
\text{ここに，}\lambda\text{は双対変数，}n\text{は原設計変数の数，}l_i\text{は要素}i\text{の長さ} \\
\qquad \rho_i\text{は原設計変数}X_i\text{の目的関数への寄与係数} \\
\qquad u_j(\mathbb{Z})=\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i,\ \left(C_{ij}=-\dfrac{\partial g_j}{\partial Z_i}(\mathbb{Z}^{(0)})\right) \\
\qquad \bar{u}_j=g_j(\mathbb{Z}^{(0)})-\sum_{i=1}^{n}Z_i^{(0)}\dfrac{\partial g_j}{\partial Z_i}(\mathbb{Z}^{(0)})
\end{array}\right\}\quad(1)$$

λ_{opt}が求まれば，逆変数$\mathbb{Z}$は次式より求められる。

$$Z_i=\left[\frac{\rho_i l_i}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}}\right]^{\frac{1}{2}}\quad(i=1,\cdots n)\qquad(2)$$

3. 双対変数の決定法

式(1)の$l(\lambda)$を最大化する方法として，これまでにニュートン法，線形連立方程式による方法，指数関数法などが提案されている。

3-1 ニュートン法（NWT法）

ニュートン法では$l(\lambda)$の最大化の方向$\mathbb{S}$を次式より計算し，

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbb{S}=\left[H(\lambda_t)\right]^{-1}\nabla l(\lambda_t) \\
\text{ここに，}H_{jk}=-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{C_{ij}C_{ik}}{\rho_i l_i}Z_i^3,\ \nabla l=\dfrac{\partial l}{\partial\lambda_j}=u_j-\bar{u}_j
\end{array}\right\}\quad(3)$$

式(4)により逐次$l(\lambda)$を最大化するようにλを改良していく方法である。

$$\lambda^{(t+1)}=\lambda^{(t)}+d^{(t)}\mathbb{S}^{(t)}\qquad(4)$$

また$d^{(t)}$のとり得る最大値は，いずれのλの値をも負にしないように次式より規制される。

$$d_{max}^{(t)}=\underset{\mathbb{S}_i^{(t)}<0}{Min}\left|\frac{\lambda_i^{(t)}}{\mathbb{S}_i^{(t)}}\right|\quad(i=1,\cdots m)\qquad(5)$$

3-2 線形連立方程式による方法（LE法）

$\mathbb{Z}$とλの関係式(2)よりZ_iに関するつぎの反復改良式を得る。

$$Z_i^{(t+1)}=Z_i^{(t)}-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}Z_i^2}{\rho_i l_i}-1\right)_{(t)}Z_i^{(t)}\qquad(6)$$

ここに，ηは改良巾を規定する定数パラメータ

いま，activeな制約条件$g_j(\mathbb{Z})$の微小変化量

$$\Delta g_j\fallingdotseq\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial Z_i}\Delta Z_i=-\sum_{i=1}^{n}C_{ij}\left(Z_i^{(t+1)}-Z_i^{(t)}\right)\qquad(7)$$

に式(6)を代入することにより，次式が得られる。

$$\Delta g_j=\sum_{i=1}^{n}C_{ij}^{(t)}\cdot\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}Z_i^2}{\rho_i l_i}-1\right)_{(t)}Z_i^{(t)}\qquad(8)$$

ところで，$\mathbb{Z}+\Delta\mathbb{Z}$におけるactiveな制約条件$j$において，$g_j(\mathbb{Z}^{(t)}+\Delta\mathbb{Z}^{(t)})=\bar{u}_j^{(t+1)}-u_j^{(t+1)}=0$となることより，

$$\Delta g_j=g_j(\mathbb{Z}^{(t)}+\Delta\mathbb{Z}^{(t)})-g_j(\mathbb{Z}^{(t)})=u_j^{(t)}-\bar{u}_j^{(t)}\qquad(9)$$

となり，これを式(8)に代入して変形することにより，双対変数$\lambda^{(t+1)}$に関するつぎの線形連立方程式が導入される。

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{(t+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{ij}C_{ik}Z_i^3}{\rho_i l_i}\right)_{(t)}=\eta\left(u_j^{(t)}-\bar{u}_j^{(t)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(C_{ij}Z_i\right)^{(t)}\qquad(10)$$

上式のλに関する線形連立方程式を解くことにより，$\mathbb{Z}^{(t)}$における$l(\lambda)\Rightarrow max$とする$\lambda$が決定され，これを式(6)に代入し，$\mathbb{Z}^{(t+1)}$を求め，新たな双対問題(1)を形成し，$\mathbb{Z}^{(t+1)}$に対する$\lambda$を再び(10)式より求める手順をくり返すことにより最適なλおよび$\mathbb{Z}$を求める。

3-3 指数関数法（EXP法）

最適解においてactiveな制約条件は，$g_j=\bar{u}_j-u_j=0$となるので，この関係より

$$\bar{u}_j=u_j\qquad(11)$$

となり，この両辺を$\bar{u}_j$で除し，その両辺にλ_jを乗じ一般式に変形すると，つぎのλに関する反復改良式を得る。

$$\lambda_{j+1}^{(t+1)}=\lambda_j^{(t)}\left(\frac{u_j}{\bar{u}_j}\right)^r,\quad j=1,\cdots m\qquad(12)$$

ここに，rはλ_jの改良巾を規定する定数パラメータ

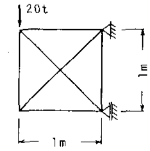
この方法によれば，最適解においてinactiveな制約条件は$g_k=\bar{u}_k-u_k>0$すなわち，$(u_j/\bar{u}_j)<1$となり，式(12)において$r>1$であるので(12)式によりλ_jをくり返し改良することにより，inactiveな制約条件に対するλ_jは0に近づき，activeな制約条件に対しては$(u_j/\bar{u}_j)\fallingdotseq 1$となり一定値に収束する。

4 計算例および考察

前述の3つの方法により，種々のトラスの最適設計を行ったが，そのいくつかの例を表−1,2，図−2,3に示す。設計条件としては，

$$\text{目的関数}\quad W(Z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i l_i}{Z_i}\Rightarrow min,\quad \text{制約条件}\ \begin{cases} g_i=\sigma_{ai}-\sigma_i\geq 0\ (i=1,\cdots n) \\ g_\delta=\delta_a-\delta_{max}\geq 0 \end{cases}$$

を考慮している。



$\sigma_{ta}=1400\text{kg/cm}^2$
$\sigma_{ca}=1300\text{kg/cm}^2$
$\rho=1.0\text{kg/cm}^3$
$E=2100000\text{kg/cm}^2$

図−1 6部材トラス

これらの計算例を比較することにより，つぎのことが明らかとなった。

1) LE法では，最低1個以上の制約条件が*active*となることが必要であるが，これは線形近似の制約条件式より変数 Z を*scaling*することにより全く単純に決定することができる。しかし，双対変数の初期値を仮定する必要のないことが大きな長所である。これに対してNWT法およびEXP法では，初期値を仮定する必要があり，いずれの方法も λ の初期値の大きさにより収束状況は大きく影響される。この場合NWT法では，1つの*sensitivity*に対して数回の*Newton iteration*をくり返すため着実に最適解の方向へ改良されるが，EXP法では一定の λ に収束するまでの経過は λ の初期値により種々変化する。

表−1 6部材トラスの種々の η におけるLE法の最適化過程

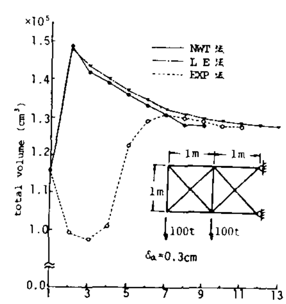
	パラメータ η	$\eta=1.0$	$\eta=2.0$	$\eta=3.0$	
$\delta_a=$ 0.27cm	SENSITIVITY の計算回数	16	9	4	σ
	TOTAL VOLUME(cm³)	5951.3	5974.4	7007.4	
$\delta_a=$ 0.25cm	SENSITIVITY の計算回数	11	7	4	σ,δ
	TOTAL VOLUME(cm³)	6095.9	6096.4	7007.4	
$\delta_a=$ 0.23cm	SENSITIVITY の計算回数	3	4	4	δ
	TOTAL VOLUME(cm³)	6627.3	6625.3	7007.4	

表−2 6部材トラスの種々の r におけるEXP法の最適化過程

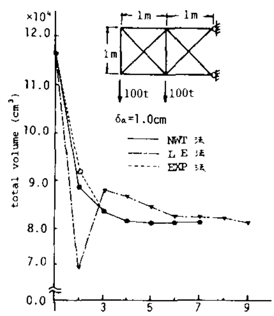
	パラメータ r	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	
$\delta_a=$ 0.27cm	SENSITIVITY の計算回数	4	3	4	6	σ
	TOTAL VOLUME(cm³)	5966.0	5927.1	5931.7	5936.7	
$\delta_a=$ 0.25cm	SENSITIVITY の計算回数	4	3	4	6	σ,δ
	TOTAL VOLUME(cm³)	6048.6	6046.6	6050.6	6051.3	
$\delta_a=$ 0.23cm	SENSITIVITY の計算回数	6	6	6	6	δ
	TOTAL VOLUME(cm³)	6574.6	6606.3	6604.1	6599.5	

(all $\lambda^{(0)}=1.0$)

2) NWT法では最適解を得るための摂動パラメータを設定する必要がないのに対して，LE法では最適解を得るための*sensitivity*の計算回数は η の値により大きく影響され，さらに表−1の $\eta=3.0$ に示すように η の値が不適当な場合には，Z の改良巾が小さすぎてTOTAL VOLUMEの変化がほとんどないため最適解とは異った解に収束してしまう場合があり，注意を要する。また，EXP法では最適解を得るために必要とする*sensitivity*の計算量はLE法ほど敏感ではなく広範囲の r の値をとり得る。このような最適解を得るための摂動パラメータの決定という点からいえば，



図−2 10部材トラスの収束状況
(たわみの制約条件が*active*)



図−3 10部材トラスの収束状況
(応力の制約条件が*active*)

NWT法＞EXP法＞LE法の順序で，アルゴリズムの信頼性が評価できる。

3) 同一の λ および A を初期値とすれば，最適解を得るために必要とする反復回数および計算量は，NWT法＜EXP法＜LE法となる。

4) 最適解を決定するための計算アルゴリズムの複雑さの点からみれば，EXP法が最も単純であり，LE法がこれにつぎ，NWT法が最も複雑となる。特にNWT法では $l(\lambda)$ を最大にする λ の決定アルゴリズム（式(4)）が複雑となる。

以上の考察により，Dual Approachにおける双対変数の決定法として，NWT法が最も信頼性のある能率的な方法であることが推定できるが，今後さらに多くの計算例により確認していく予定である。

＜参考文献＞

1) N.S. Khot : "Algorithm Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structure Engineering Optimization, 1981, vol.5
2) 大久保・谷脇："双対理論による構造最適化に関する研究" 愛大紀要 P.P 135〜150 (1983.2)
3) 大久保・谷脇："双対理論による構造最適化の基礎的研究" 土木学会第37回年講 I−15 (1982.10)